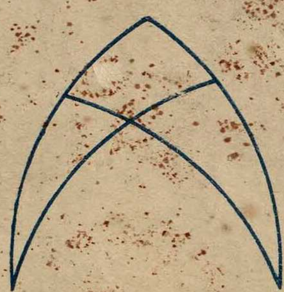
МУХАММЕД НАСИРЭДДИН ТУСИ

ТРАКТАТ

О ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКЕ

(ШАКЛУЛ ГИТА)



Баку — 1952

Глубокоуважаемому
Гасану Мамедовичу
от редакторов
Б Розенф

27/III
1953

АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

МУХАММЕД НАСИРЭДДИН ТУСИ

ТРАКТАТ

О ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКЕ

(ШАКЛУЛ ГИТА)

Перевод под редакцией

Г. Д. МАМЕДБЕЙЛИ и Б. А. РОЗЕНФЕЛЬДА

Издательство Академии Наук Азербайджанской ССР
Баку — 1952

ПРЕДИСЛОВИЕ

Некоторые элементы плоской тригонометрии были известны многим древним народам. Трудно установить, какому народу впервые стали известны простые геометрические фигуры, в том числе треугольники. Вернее было бы предположить, что самые элементарные знания в области тригонометрии каждым народом приобретались самостоятельным путем. Как правило, буржуазные историки естествознания зарождение первоначальных знаний в области тригонометрии приписывают только грекам, упуская из виду влияние вавилонской и египетской науки и науки других народов Ближнего и Среднего Востока на греков.

Известно, что еще за 18 веков до нашей эры вавилоняне предсказывали солнечное и лунное затмения, что было бы невозможно без знания некоторых основных элементов тригонометрии. Им было известно деление окружности на 360 частей, они знали также, что сторона вписанного правильного шестиугольника равна радиусу окружности. Существование на территории Египта знаменитой „греческой" Александрийской школы, проживание многих греческих ученых в Египте, близость последнего к греческим островам говорит о том, что греческие и египетские научные школы не были изолированы друг от друга.

Особое развитие геометрии в Египте было связано с экономическими и хозяйственными условиями, в которых важную роль играли ежегодные разливы Нила и ежегодное же перераспределение принильских земель, пригодных для земледелия.

Тригонометрические знания применялись также в архитектуре. Египетские архитекторы умели вычислять формы камней, чтобы они образовали на ступенчатой основе пирамиды гладкую поверхность.

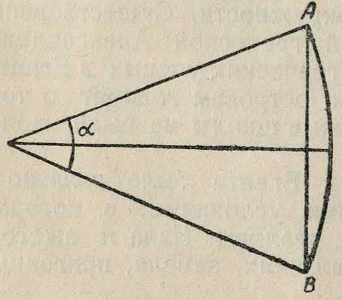
До нашего времени дошли многочисленные труды в оригиналах и переводах греческих авторов, но очень мало осталось материалов и документов по математике у древних египтян и других народов. В силу этого мы вынуждены говорить об истории греческой математики. Но, в отличие от предшествующих историков, когда мы говорим о греческой науке, мы понимаем ее как синтез науки греков с наукой других народов.

Первым греческим ученым считается Фалес Милетский (640—556 до н. э.), который получил первоначальное образование в Египте. Там же он научился не только предсказывать лунные и солнечные затмения, но и усвоил геометрию.

Фалесу известны были теоремы: о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о том, что круг делится пополам всяким диаметром, о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим углам. Фалес умел определять расстояние корабля от берега. Он и его ученики сыграли важную роль в распространении астрономических и математических знаний египтян в Греции.

Греческая математика достигла большого развития благодаря трудам Евклида, Архимеда, Аполлония, Гиппарха, Менелая, Птолемея и других авторов. Элементы сферической тригонометрии были развиты в трудах Гиппарха, Менелая и Птолемея.

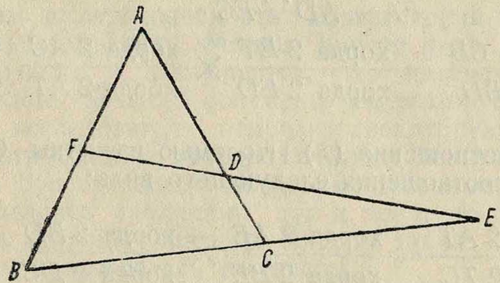
Гиппарх из Никеи жил во II веке до н. э. и прославился как астроном и математик. Ему принадлежит первенство идеи составления звездного каталога. Им был составлен каталог звезд, в котором он указал небесные координаты 1080 звезд. Этот каталог повидимому был уничтожен и не дошел до нас. Свои тригонометрические знания Гиппарх использовал для вычисления координат небесных тел, но ему еще не известны были тригонометрические функции. Он вычислил и составил таблицу хорд для соответствующих углов. В нашем современном понимании он давал для каждого значения α значение хорды:



$$AB=2\sin\frac{\alpha}{2}$$

Во времена Гиппарха и значительно позже, до Насирэддина, тригонометрия не существовала как самостоятельная математическая дисциплина и имела больше отношения к астрономии, нежели к математике. Разработанные части тригонометрии включались в труды по астрономии.

Приблизительно двумя веками позже Гиппарха жил Менелай Александрийский, которым был написан очень важный труд под названием „Сферика“. Греческий текст „Сферики“ не дошел до нас, но это произведение в улучшенном виде было изложено Абу Наср ибн Ираком. Повидимому этим арабским текстом пользовался и Насирэддин. Первое предложение II книги этого произведения посвящено известной теореме, получившей впоследствии название „теоремы Менелая“. Менелай рассматривает плоский полный четырехсторонник. Полным плоским четырехсторонником Насирэддин называет фигуру, образованную четырьмя прямыми линиями, пересекающимися попарно так, что в одной и той же точке пересекается не более двух линий. Ее можно рассматривать так же, как треугольник с прямой, пересекающей все его стороны или их продолжения. Пусть дан треугольник ABC. Если прямая FDE пересекает стороны треугольника в точках F, D и E, то имеет место следующее равенство:

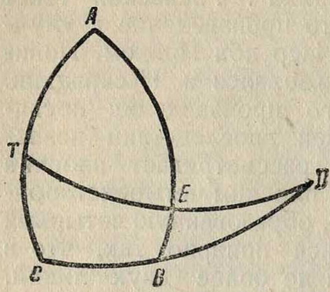


$$\frac{BE}{FA} \times \frac{AD}{DC} \times \frac{EC}{EB} = 1, \qquad (1)$$

Иначе говоря, если какая-нибудь прямая линия пересекает стороны треугольника, то произведение трех отрезков, не имеющих общих точек, равно произведению трех других отрезков. Фигура $AFBCED$ также называлась „плоской секущей фигурой“, „шаклул гита“, „figura cata“, „figura sectoris“, „figura secantis“, так как прямая FDE, пересекая все три стороны треугольника ABC, образует ее. Соотношение (1) называется „теоремой Менелая“. Заметим, что Насирэддин ее называет просто „теоремой древних астрономов“.

Если прямые линии (рис. 2) заменить дугами больших кругов на сфере, то мы будем иметь сферический полный четырехсторонник.

Менелай и Птолемей для сферического полного четырехсторонника знали следующее соотношение:



$$\frac{\text{хорда } 2\,CB}{\text{хорда } 2\,BD} \times \frac{\text{хорда } 2\,ED}{\text{хорда } 2\,ET} \times \frac{\text{хорда } 2\,AT}{\text{хорда } 2\,AC} = 1 \qquad (2)$$

Необходимо отметить, что в древности и в средние века выражения (1) и (2) давались в форме составного отношения, т. е. в виде:

$$\frac{BE}{FA} = \frac{DC}{AD} \times \frac{EB}{EC} \qquad (1')$$

и $$\frac{\text{хорда } 2\,CB}{\text{хорда } 2BD} = \frac{\text{хорда } 2\,ET}{\text{хорда } 2\,ED} \times \frac{\text{хорда } 2\,AC}{\text{хорда } 2\,AT} \qquad (2')$$

Кроме соотношения (2′) Птолемею известны были еще три другие соотношения следующего вида:

$$\frac{\text{хорда } 2\,AT}{\text{хорда } 2\,TC} = \frac{\text{хорда } 2\,AE}{\text{хорда } 2\,BE} \times \frac{\text{хорда } 2\,BD}{\text{хорда } 2\,DC} \qquad (3)$$

$$\frac{\text{хорда } 2\,CD}{\text{хорда } 2\,BD} = \frac{\text{хорда } 2\,DT}{\text{хорда } 2\,ET} \times \frac{\text{хорда } 2\,AE}{\text{хорда } 2\,AB} \qquad (4)$$

$$\frac{\text{хорда } 2\,DT}{\text{хорда } 2\,DE} = \frac{\text{хорда } 2\,CT}{\text{хорда } 2\,AC} \times \frac{\text{хорда } 2\,AB}{\text{хорда } 2\,BE} \qquad (5)$$

Использование в этих формулах хорд вместо синусов объясняется тем, что греческим ученым еще не были известны тригонометрические функции.

Как видно из этих формул, для определения одной неизвестной величины требовалось знание пяти известных величин. Для упрощения вычисления греческие астрономы некоторые из этих пяти величин выбирали так, чтобы соответствующие хорды были равны диаметру.

Теорема Менелая была основной формулой, которая применялась для решения сферических треугольников при астрономических задачах.

В этом заключается важная заслуга древних греков в развитии тригонометрии, т. е. в составлении таблиц дуг и хорд и в доказательстве и применении теоремы Менелая для решения астрономических задач.

История науки пока не располагает достаточным материалом о состоянии науки у китайцев, индусов и других народов в прошлом. Между тем известно, что эти народы имеют очень древнюю культуру. Поэтому отрицание роли этих народов в развитии астрономии, математики и других наук голословно, ничем не обосновано.

Некоторые сведения о развитии тригонометрии в древней Индии имеются в распоряжении историков математики. В 1860 г. было переведено на английский язык астрономическое произведение под названием „Сурья-Сиддханта". Время составления этого произведения относится к IV веку н. э. Другое индусское астрономическое произведение „Сиддханта Чиромани" было составлено Баскара Акариа в XII веке.

Детальным исследованием этих произведений занимались Рейнауд, Альбрехт Вебер, Мориц Кантор и др. Эти исследователи пришли к заключению, что математические и астрономические знания получены индусами от греков. Однако эти исследователи отмечают некоторую самобытность математических и астрономических знаний индусов. Если греки при решении астрономо-тригонометрических задач пользовались таблицами дуг и хорд, то у индусов уже имелись таблицы синусов. Индусы также, хотя в неявной форме, пользовались тангенсом.

Индусские математики не только знали о тригонометрической функции sinus, но и умели ее применять для решения астрономических задач.

Важная роль в развитии тригонометрий принадлежит народам Средней Азии, Кавказа, арабам и другим национальностям. Долгое время научные достижения наших соотечественников буржуазные историки относили к так называемой „арабской науке". „В буржуазной науке распространена версия о существовании единой средневековой восточной культуры, якобы охватывающей все народы, принявшие ислам. Эта единая культура обычно называется буржуазными учеными „арабской" или „арабо-мусульманской" (иногда условно, с оговоркой, что в ее создании принимали участие и не арабы, иногда без всяких оговорок). Таким образом, буржуазная наука отрицает как наличе самостоятельных культур народов средневекового Востока, покоренных арабами в 7—8 веках: таджиков, узбеков, азербайджанцев, туркмен, иранцев и др., так и наличие самостоятельной арабской культуры, созданной самими арабами. В основе этого антинаучного представления, извращающего подлинный характер взаимодействия культур народов Востока в средние века, лежит империалистический великодержавно-шовинистский подход к этим народам, как к народам якобы неспособным к самостоятельному культурному творчеству и воспринявшим некую космополитическую культуру, называемую арабской". (БСЭ, слово „Арабская культура").

В VII веке арабские захватчики завоевали ряд стран Передней Азии и Северной Африки. Образовав халифат, арабы во всех своих владениях государсвенным языком сделали арабский язык. Поэтому в первые века после арабского завоевания пользование этим языком было принудительным. На арабском языке писали свои научные произведения многие ученые всего Переднего Востока.

В дальнейшим арабский язык стал своего рода „общим знаменателем". В эпоху Возрождения и значительно позже в Западной Европе в массовом масштабе переводились на латинский язык произведения ученых Востока, писавших свои работы по-арабски. Поэтому неудивительно, что европейцы всех ученых Востока принимали за арабов. Так возник термин „арабская наука", в частности термины „арабская астрономия" и „арабская математика".

Проф. А. П. Юшкевич в связи с этим пишет: „Действительно, так называемая арабская математика вовсе не была математикой арабов—подобно тому, как не была латинской математикой наука писавших по-латыни француза Ферма, итальянца Торичелли, англичанина Ньютона, немецкого ученого Лейбница и русского академика Эйлера. Под названием „арабской" науки неправомерно скрывались достижения ученых различных народов, пользовавшихся в научном обиходе преимущественно, хотя и не исключительно, арабским языком, который в мусульманском средневековом мире играл роль, сходную с ролью латыни в средневековой католической Европе"[1].

В IX веке Багдад был одним из крупнейших городов мира. Около двух веков Багдад играл большую роль в развитии науки. В этот период важное значение имели: перевод индусских рукописей, перевод греческих рукописей, участие в развитии науки представителей народов, покоренных арабами.

---

[1] Юшкевич А. П.—О математике народов Средней Азии в IX—XV веках. Историко-матем. исследования, вып. IV, М—Л., 1951, стр. 457.

Были сделаны первые переводы астрономического сочинения индусов „Сиддханта“, „Начал“ Евклида, „Алмагеста“ Птолемея, произведений Архимеда, Диофанта, Герона, Аполлония, Менелая, Аристарха и других греческих авторов.

Выдающимися учеными IX века были Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми и Беттани.

Мухаммед Хорезми вложил также много труда в дело перевода произведений греческих ученых.

Известный историк математики Г. Цейтен пишет о нем, что „он принадлежал к той группе ученых, которой халиф Альмансур поручил переводы греческих математиков, измерение градуса меридиана и ряд других научных работ. Слово алгорифм это просто его собственное прозвище, перенесенное на заглавие одной из его книг по арифметике, в которой излагались правила письменного счета по позиционной системе“[1].

Мухаммед Хорезми впервые составил трактат по алгебре. В этом трактате Хорезми рассматривает алгебраические уравнения первой и второй степени. В противоположность грекам Хорезми не довольствуется геометрическими решениями алгебраических уравнений, им приводятся и числовые примеры. Мухаммед Хорезми был уроженцем Хорезма (Узбекистан).

Выдающимся арабским астрононом и математиком был Беттани (Абу Абдулла Мухаммед ибн Джабир ибн Синан). Точная дата его рождения неизвестна. Предполагается, что он родился после 849 г. Латинизированное имя его Альбатегниус (Albategnius).

Беттани на собственные средства построил астрономическую обсерваторию в местности Аррака и производил там в течение 41 года астрономические наблюдения (с 877 г. по 918 г.). Беттани удалось с большой точностью определить эксцентриситет орбиты Земли и установить вековое изменение долготы солнечного апогея. Важным трудом Беттани является составленный им каталог звезд под названием „Зидж Саби“. Известны два латинских перевода этого произведения, причем последний принадлежит Региомонтану и издан в 1646 г.

Мы должны отметить, что в „Шаклул гита“ Насирэддина нигде не говорится о работах Беттани по тригонометрии. Повидимому это можно объяснить тем, что Насирэддину не были известны работы Беттани.

Выдающимся математиком и астрономом IX века был Сабит ибн Курра (821—901 гг.). Сабит кроме арабского пре-

---

[1] Цейтен Г. Г.—История математики в древности и в средние века. ГОНТИ, М—Л., 1938, стр. 197.

красно владел греческим и сирийским языками. Его перу принадлежит более 150 различных работ[1].

Теорема синусов впервые дана и доказана Сабитом. Одним из лучших трудов Сабита является его перевод „Начал" Евклида. На базе этого перевода Насирэддин написал свое знаменитое произведение „Тахрири Эглидис".

Первоначальное название теоремы синусов было иным, своеобразным. Насирэддин, следуя своим предшественникам, называет ее „Шаклул мугни", что дословно означает: „заменяющее предложение" или „заменяющая теорема". Здесь имеется в виду, что эта теорема заменяет теорему Менелая.

Насирэддин формулирует „Шаклул мугни" таким образом: „Эта теорема состоит в том, что отношения синусов сторон треугольников, образованных на поверхности сферы пересечением дуг больших кругов, равны отношениям синусов углов, имеющих эти стороны своими хордами".

Как указывает Насирэддин, замена теоремы Менелая теоремой синусов была произведена различными учеными независимо друг от друга.

„К этой цели идут различными путями, которые все изложены в книге нашего великого учителя Абу Рейхан Бируни, озаглавленной „Ключ к познанию фигур на поверхности сферы".

Так как эти пути сильно отличаются друг от друга, я избрал тот путь, который кажется мне наиболее убедительным, чтобы настоящий трактат был возможно более кратким и наглядным. Таким путем является путь Эмира Абу Наср Али ибн Ирака. По мнению Абу Рейхана, ему первому удалось найти путь, применимый ко всем случаям, хотя два других уважаемых ученых, Абул Вафа Мухаммед ибн Мухаммед Бузджани и Абу Махмуд Хамид ибн Хазар Ходженди оспаривают у него приоритет по этому вопросу"[2].

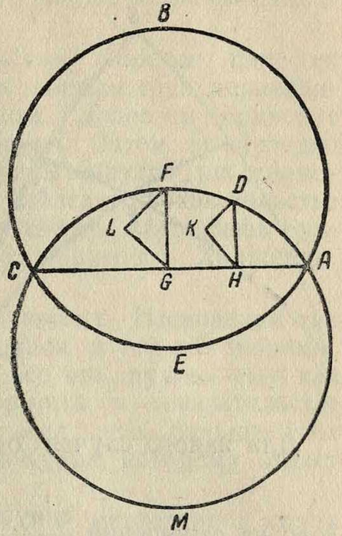
К „Шаклул гита" Насирэддин прилагает извлечение из книги Сабит ибн Курра, где впервые излагается теорема синусов с ее доказательством. Ниже помещаем это извлечение из книги Сабита, переписанное Насирэддином.

„ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИЗ КНИГИ САБИТА ИБН КУРРА О ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКЕ И СОСТАВНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

Если нам предложат доказать с помощью синусов то, что Птолемей хотел доказать с помощью полного четырехсторонника, мы можем сказать, что мы нашли более легкое и более прямое доказательство, чем доказательство Птоле-

[1] Салех Зеки, Асар багийе, стр. 152.
[2] Насирэддин, „Шаклул гита", стр. 149.

мея, что из четырех вспомогательных предложений, предшествовавших этому доказательству, и которое сводит все случаи к двум, один для неявного отношения, а другой — для явного отношения.



Пусть $ABCE$, $ADCM$ — два большие круга одной сферы, пресекающиеся в точках A и C. Возьмем на круге $ADCM$ две дуги, каждая из которых меньше полуокружности; пусть эти дуги AD и AF. Опустим из точек D и F два перпендикуляра на плоскости круга $ABCE$.

Я утверждаю, что

$$\frac{\text{синус } AD}{\text{синус } AF} = \frac{\text{перпендикуляр из } D}{\text{перпендикуляр из } F}$$

Доказательство состоит в следующем.

Пересечение плоскостей этих двух кругов является диаметром AC. Опустим из D и F на AC два перпендикуляра DH и FG.

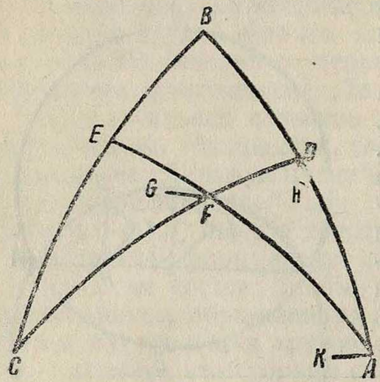
Если они перпендикулярны также к плоскости круга $ABCE$, мы сразу докажем то, что мы хотим доказать, так как эти перпендикуляры, очевидно, являются синусами дуг AD и AF; если же эти два перпендикуляра, опущенные на AC, не перпендикулярны плоскости $ABCE$, опустим из точек D и F на $ABCE$ перпендикуляры DK, FL; эти две линии будут параллельны. Но линии DH, FG так же будут параллельны, откуда следует, что углы HDK и GFL равны; кроме того углы HKD, FLG — прямые, вследствие чего треугольники DHK и FLG подобны, откуда $\frac{DH}{FG} = \frac{\text{синус } AD}{\text{синус } AF} =$

$$= \frac{\text{перпендикуляр } DK}{\text{перпендикуляр } FL}.$$

Доказательство не изменится, если одна из двух дуг будет расположена по другую сторону CA — в направлении точки M.

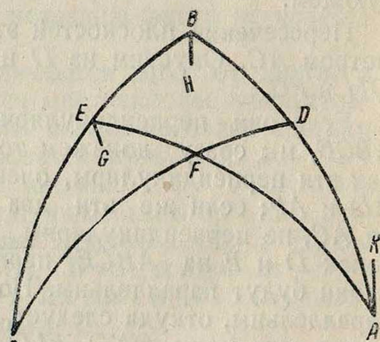
Установив это, проведем для двух дуг AB, BC через точку F две дуги AE, CD. Я утверждаю, что отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } BD}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } AE}{\text{синус } EF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CD}$.

Доказательство. Через точки A, D, F проведем к плоскости круга BC перпендикуляры AK, DH, FG.



Отношение $\frac{AK}{DH}$ всегда будет составлено из отношений $\frac{AK}{FG}$ и $\frac{FG}{DH}$. Но $\frac{AK}{DH}=\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } BD}$ и точно также $\frac{AK}{FG}=\frac{\text{синус } AE}{\text{синус } EF}$ и $\frac{FG}{DH}=\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CD}$, что доказывает указанное нами соотношение между синусами.

Для явного случая отношение $\frac{\text{синус } AD}{\text{синус } DB}$ будет составлено из отношений $\frac{\text{синус } AF}{\text{синус } FE}$ и $\frac{\text{синус } EC}{\text{синус } CB}$.



Доказательство в точности совпадает с только что рассмотренным. Через точки A, B, E проведем перпендикуляр AK, BH, EG к плоскости круга CD.

Отношение $\frac{AK}{BH}$ всегда будет составлено из отношений

$\frac{AK}{ET}$ и $\frac{ET}{BH}$, но $\frac{AK}{BH}=\frac{\text{синус } AD}{\text{синус } DB}$, $\frac{AK}{ET}=\frac{\text{синус } AE}{\text{синус } FE}\cdot\frac{ET}{BH}=$

$=\frac{\text{синус } EC}{\text{синус } BH}$, что доказывает указанное нами соотношение.

Все другие доказательства аналогичны предыдущим. Переписано с рукописи автора".

Этот документ показывает, что впервые теорема Менелая была заменена теоремой синусов Сабитом ибн Курра.

Мы должны отметить, что замену теоремы Менелая теоремой синусов Насирэддин справедливо считает одним из краеугольных камней сферической тригонометрии и поэтому очень подробно излагает этот вопрос в своем „Шаклул гита".

Прежде чем дать доказательство теоремы синусов, Насирэддин излагает доказательства теоремы трех перпендикуляров, данной Абу Наср Ираком. Далее он приводит доказательство, принадлежащее Бируни. Затем Насирэддин переходит к доказательству теоремы синусов для прямоугольного треугольника, причем излагает доказательства этой теоремы, принадлежащие Абу Насру, Абул Вафа Бузджани, Абул Фазлу Табризи, Абу Махмуду Ходженди, Бируни.

Сначала нам кажется странным, почему Насирэддин так подробно излагает доказательства одной и той же теоремы, данные различными учеными. Но все это нужно ему для того, чтобы выяснить вопрос приоритета в доказательстве теоремы синусов. Насирэддин учитывал, что раньше всех теорему синусов доказал Сабит ибн Курра, которому отдает должное.

Одним из выдающихся астрономов и математиков конца IX века был Абул Фазл Табризи[1], родившийся в гор. Тавризе (точные даты рождения и смерти не установлены). В западноевропейской научно-исторической литературе Табризи известен как Анариций.

Табризи был замечательным астрономом и математиком. Ибн Юнис высоко оценивает Табризи как искусного астронома-наблюдателя. Табризи написал следующие труды: „Комментарии к Алмагесту", „Комментарии к „Началам"[2] Евклида", „Великий зидж Синдхинд", „Малый зидж" и другие. В своем комментарии к „Алмагесту" Птолемея Табризи заменил теорему Менелая теоремой синусов.

Выдающимся астрономом и математиком был Абул Вафа Мухаммед Бузджани (940—998 гг.). Абул Вафа является уроженцем Бузджана. Двадцати лет он прибыл в Багдад, где провел всю жизнь. Абул Вафа долгое время занимался астрономическими наблюдениями. Как астроном он знаменит тем, что им впервые начата работа по изучению теории Луны, им были определены угловые диаметры Луны и Солнца. Абул

---

[1] Poggendorff, Biograph. litter. Hadwörterbuch, Лейпциг, 1898, т. III., стр. 24.

[2] Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii. Ed. M. Gurtze, Лейпциг, 1899.

Вафа обращал особое внимание на прикладную сторону геометрии и алгебры.

Важной заслугой Абул Вафа в области тригонометрии является данная им теорема тангенсов (по терминологии Насирэддина „шаклул зилли“, дословно—„предложение теней“).

Иногда в научно-популярной литературе указывается, что будто ученые Востока X—XV веков не имели понятия о тангенсе и котангенсе в том смысле, какой мы вкладываем в настоящее время в эти термины.

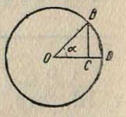
Ф. К. Кэджори пишет: „На Брадвардина и на немногих других британских ученых англичане с гордостью ссылаются как на первых европейских писателей по тригонометрии. Их сочинения содержат тригонометрию, заимствованную из арабских источников. Джон Модисз (John Maudith), бывший профессором в Оксфорде около 1340 г., говорит об umbra (тангенс); Брадвардин употребляет термины „umbra recta“ (котангенс) и „umbra versa“ (тангенс).

Мы встречаемся здесь с новой функцией. Индусы ввели синус, синус верзус[1], косинус; арабы—тангенс, англичане прибавили теперь котангенс“[2].

Как увидим далее, Кэджори и его предшественники не правы, когда говорят, что введение котангенса является заслугой англичанина Брадвардина. Насирэддин, говоря о теореме тангенсов, утверждает, что приоритет этой теоремы принадлежит Абул Вафа Бузджани. Далее им дается в очень явной форме определение тангенса, котангенса, секанса, косеканса. Не остается никакого сомнения в том, что все тригонометрические функции были известны еще в X веке, если не раньше.

Цитируем Насирэдина по этому поводу:

„Приоритет в доказательстве этой теоремы несомненно принадлежит Абул Вафа Бузджани. По свидетельству Абу Рейхана Бируни никто другой не может предъявить претензию на это. Эта теорема состоит в том, *что отношение синуса одной из сторон прямоугольного треугольника, образованного дугами больших кругов к синусу прямого угла, равно отношению тангенса другой стороны прямого угла к тангенсу угла, хордой которого является эта сторона.*



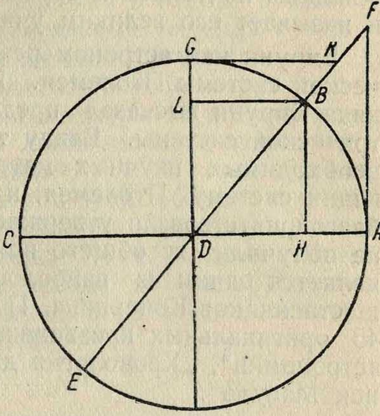
---

[1] Синус верзусом называется отрезок $CD=OD-OC=$ $=r-\cos\alpha$).

[2] Кэджори Ф. К.—История элемент. математики. Одесса, 1917, стр. 147.

Прежде чем перейти к доказательству, следует сказать, что под тангенсом дуги здесь понимается линия, отсекаемая диаметрами, проходящими через концы этой дуги, на перпендикуляре, восстановленном на одном из ее концов к диаметру, проходящему через этот конец; при этом этот перпендикуляр параллелен синусу этой дуги, который должен быть перпендикулярен тому же диаметру.

Пусть дан круг $ABCE$ с центром D и дуга AB. Проведем диаметры, проходящие через точки A, B, и из точки A восстановим к AC перпендикуляр, который пересечет диаметр BE в F; AF есть тангенс дуги AB, параллельной линии BH, являющейся синусом этой дуги. Точно также восставим к AC перпендикуляр DG в центре. Перпендикуляр GK будет тангенсом дуги GB, в то время как BL является синусом этой дуги; другими словами, GK и BL будут котангенсом и косинусом дуги AB. То что мы назвали тангенсом, астрономы называют первой тенью или обратной тенью дуги AB, называемой возвышением или восхождением; они называют GK второй тенью или прямой тенью дуги AB; у них FD—диаметр первой тени, а KD—диаметр второй тени; они пользуются этими диаметрами для измерения тангенсов аналогично тому, как они измеряют синусы и хорды. Иногда они делят вторую тень на двенадцать частей, которые они называют „эсабе“—„пальцами“, или же на девять, или шесть, которые они называют „экдам“—„шагами“. Тангенс всякой дуги является котангенсом ее дополнения, и наоборот; отношение тангенса к радиусу равно отношению синуса дуги к ее косинусу; отношение тангенса к диаметру FD этого тангенса в силу подобия треугольников FAD и BHD равно отношению синуса к радиусу; но треугольники AFD и KGD также подобны и $\frac{FA}{AD}=\frac{GD=AD}{KG}$; таким образом,



радиус является средним пропорциональным между тангенсом и котангенсом дуги, и отношение тангенсов двух дуг обратно отношению тангенсов их дополнений. Точно так же отношение тангенса дуги к тангенсу дополнения второй дуги равно отношению тангенса этой второй дуги и тангенсу дополнения первой дуги".

Приведенное выше высказывание Насирэддина показывает, что математики и астрономы X века не только имели полное понятие о всех тригонометрических функциях, но им были известны все важнейшие формулы сферической тригонометрии.

В истории астрономии и математики исключительно велики заслуги узбекского ученого Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед Бируни (973—1048 гг.). Насирэддин относится с большим почтением к огромному научному наследию Бируни и называет его великим учителем.

Бируни как астроном резко выступил против геоцентрической системы Птолемея. Примерно за 500 лет до Коперника Бируни высказал предположение в пользу гелиоцентрической системы. Ввиду того, что тогда еще не имелось необходимых научных материалов, полностью опровергающих систему Птолемея, и социальная обстановка еще не благоприятствовала утверждению смелых идей Бируни, они не получили всеобщего признания. Но несомненно Бируни является одним из наиболое смелых и решительных предшественников Коперника. Перу Бируни принадлежит более 45 оригинальных призведений, в числе которых „Ключ к астрономии", „Хронология древних народов", „Индия", „Канон Масуда".

В предлагаемом вниманию читателей произведении „Шаклул гита" Насирэддин, излагая все тригонометрические работы Бируни, указывает, что им впервые в тригонометрии радиус принят за единицу. В „Шаклул гита" Насирэддин подробно излагает все достижения своих предшественников в области тригонометрии. На основе исторических документов он уточняет и восстанавливает их приоритет в отдельных областях тригонометрии.

Но этим не исчерпываются заслуги Насирэддина. Главнейшие его заслуги в области тригонометрии сводятся к следующему: 1) Насирэддин последовательно развивает теорию отношений, 2) завершает теорию полных так называемых четырехсторонников, 3) подробно излагает способы решения плоских и сферических треугольников, 4) впервые вводит понятие сферического полярного треугольника и применяет его к решению задачи определения стороны сферического треугольника по трем углам.

В результате своей творческой работы в области прямолинейной и сферической тригонометрии Насирэддин превратил ее в самостоятельную математическую дисциплину, чем намного опередил немецкого ученого Региомонтана.

Историк математики Браунмюль подчеркивал эту заслугу Насирэддина следующим образом:

„Труд Насирэддина действительно заслуживает названия системы тригонометрии, ибо хотя его предшественники Абул Вафа, Абу Наср, Аль Бируни и др. предпосылали своим астрономическим сочинениям главу, к которой приводили сводку и обоснование тригонометрических правил, но у них тригонометрия выступала все же только как наука вспомогательная для астрономии, но не имеющая самостоятельного значения. Насирэддин, напротив, понял ее собственное математическое значение и стремится поэтому обосновать ее как самостоятельную дисциплину, положив в основу полный четырехсторонник. Все его фундаментальные теоремы совершенно последовательно выводятся из этой фигуры“[1].

„Шаклул гита“ Насирэддина являлось основным руководством по плоской и сферической тригонометрии. В этом произведении Насирэддин не коснулся лишь теории составления таблиц тригонометрических функций.

В дальнейшем большую работу в этой области проделали астрономы Улугбекской обсерватории Джемшид Гиясэддин Каши (около 1427 г.), Казизаде Руми, которые составили весьма ценные тригонометрические таблицы. Достаточно указать, что Гиясэддин вычислил значение синуса одного градуса равное 0,017452406437.

* * *

Выдающийся азербайджанский ученый Мухаммед Насирэддин родился в 1201 г. Начальное образование он получил в городе Тус. В 1258/1259 гг. Насирэддин создал в городе Марага всемирноизвестную астрономическую обсерваторию, составившую важную эпоху в истории науки.

Город Марага становится крупнейшим научным центром мира. Богатое научное наследие Марагинской астрономической обсерватории оказало плодотворное влияние на развитие науки в последующие века. Имя основателя Марагинской астрономической обсерватории Мухаммеда Насирэддина вошло в науку как имя одного из классиков естествознания. Насирэддин умер в Мараге в 1274 г., оставив богатое научное наследие в области астрономии, математики, минералогии и др. Его труды „Тахрири Эглидис“ (изложение „Начал“ Евклида) и „Шаклул гита“ имели громадное значение в развитии математической мысли. В общей сложности Насирэддином было написано более ста научных трудов. Руко-

---

[1] V. Braunmühl, Beittrage zur Geschichte der Trigonometrie. Halle, 1897, стр. 71.

писи Насирэддина и напечатанные труды хранятся в крупнейших библиотеках Советского Союза (библиотека имени В. И. Ленина в Москве, Публичная библиотека имени М. Е. Салтыкова-Щедрина в Ленинграде, библиотека Казанского университета имени В. И. Ульянова-Ленина, Рукописный фонд Академии наук Азербайджанской ССР и др.), в библиотеках Англии, Франции, Германии, Италии, Испании, Египта, Турции, Индии и других стран.

Не все работы Насирэддина изучены. По-настоящему к изучению его богатого научного наследия приступлено только в последние годы. В 1951 г. в связи с 750-летием со дня рождения Насирэддина Академия наук Азербайджанской ССР провела научную сессию, посвященную этому выдающемуся азербайджанскому ученому. Было решено приступить к систематическому изданию трудов Мухаммеда Насирэддина. Настоящее издание является первым шагом в этом направлении.

Как указывается в авторском предисловии к „Шаклул гита", это произведение написано Насирэддином вторично. Первоначально Насирэддин написал „Шаклул гита" на персидском языке. Пока не установлено, когда написан первый вариант „Шаклул гита". Второй вариант, переведенный самим автором на арабский язык, создан в 1260 г.

В 1891 г. этот труд был издан на французском и арабском языках. Французский перевод местами страдал неточностью и погрешностями.

Настоящее издание было подготовлено к печати следующим образом. Сначала был сделан перевод „Шаклул гита" с арабского на азербайджанский язык М. Р. Аскерли; в дальнейшем этот перевод был отредактирован М. Эфенди-заде, в чем некоторую помощь оказал Г. Заринезад. Азербайджанский текст „Шаклул гита" был подготовлен к печати Г. Д. Мамедбейли и М. У. Гашим-заде.

Азербайджанский текст явился основой для редактирования перевода „Шаклул гита" с французского языка на русский. Перевод с французского был сделан бывшим ученым секретарем Института физики и математики С. П. Ризниченко. Русский текст был тщательно сверен с азербайджанским переводом, а в спорных местах—с арабским оригиналом.

Русский текст перевода „Шаклул гита" был отредактирован доц. Г. Д. Мамедбейли и проф. Б. А. Розенфельдом.

З. Д. ХАЛИЛОВ
Г. Д. МАМЕДБЕЙЛИ

ВВЕДЕНИЕ

Этот трактат посвящен теории известной фигуры, называемый полным четырехстронником[1]. Здесь изложены доказательства теорем об этой фигуре вместе с различными вариантами этих доказательств и необходимыми дополнениями.

Я написал этот трактат первоначально на персидском языке, но по просьбе многих моих товарищей и учеников я перевел его на арабский язык. Вместе с тем я несколько сократил его за счет некоторых излишних мест.

Этот трактат подразделяется на пять книг, каждая из которых состоит из нескольких предложений или глав.

В первой книге, содержащей четырнадцать предложений, изложена теория составных отношений.

Вторая книга, содержащая одиннадцать глав, посвящена плоскому полному четырехстороннику и имеющимся в нем отношениям.

Третья книга, содержащая три главы, посвящена введению в теорию сферического полного четырехсторонника и изложению правил, полезных для применения этой теории.

Четвертая книга, содержащая пять глав, посвящена сферическому полному четырехстороннику и имеющимся в нем отношениям.

В пятой книге, содержащей семь глав, рассматривается определение дуг больших кругов с помощью методов, заменяющих теорию сферического полного четырехсторонника.

---

1 Мы переводим арабское выражение شكل القطاع (шаклул гита), дословно—„фигура, составленная из секущих“, установившимся в русской математической литературе термином „полный четырехсторонник“.

КНИГА ПЕРВАЯ

О СОСТАВНОМ ОТНОШЕНИИ И ЕГО СВОЙСТВАХ

В этой книге содержится 14 предложений.

Замечание

Так же как мы познаем полностью раздельную величину только сравнивая ее с непрерывной величиной, которая предполагается разлагаемой до бесконечности, так же мы можем познать полностью непрерывную величину только сравнивая ее с раздельной величиной, предполагая, что эта величина состоит из величин, являющихся единицами, измеряющими эти величины; однако это сравнение выходит за рамки настоящего сочинения[1].

Напоминание

Евклид в начале шестой книги своих „Начал"[2] говорит, что отношение называется составным отношением, составленным из других отношений, если количество данного отношения является произведением количеств этих отно-

---

[1] В этом замечании речь идет о сравнении теории отношений непрерывных величин (отрезков и других геометрических величин) с теорией отношений дискретных величин (целых чисел). У древнегреческих математиков, например в „Началах" Евклида, эти две теории были оторваны друг от друг и противопоставлены друг другу, причем числами считались только отношения целых чисел. Точка зрения автора значительно ближе к нашей: как мы увидим, в этом трактате делается существенный шаг в направлении перенесения понятия числа на непрерывные величины. Эта точка зрения автора подчеркивается и настоящим замечанием.

[2] Евклид (Eukleides)—знаменитый древнегреческий математик, живший в III веке до н. э. Основное произведение Евклида „Начала" („Stoicheia"). Русский перевод „Начал" Евклида: I—VI книги, ГТТИ, М—Л., 1948, VI—X книги, ГТТИ, М—Л., 1949, XI—XIII книги, ГТТИ, М—Л., 1950. В подлиннике указана арабская транскрипция имени Евклида اقليدس (Оглидис) и арабское название „Начал" كتاب الاصول („Китабул усул") дословно—„Книга корней".

шений[1]. Говорят также, что отношение разлагается на другие отношения, если количество одного из таких отношений получено делением количества данного отношения на количества остальных из этих отношений. Напомнив эти определения, я перехожу к первому предложению.

Предложение I

Если даны три однородные величины, находящиеся между собой в определенных отношениях, то отношение первой величины ко второй составлено из отношений первой величины к третьей и третьей величины ко второй.

A	B	C	единица	D	E	F [2]

Пусть нам даны величины A, B и C. Я утверждаю, что отношение A к B составлено из отношений A к C и C к B, отношение A к C составлено из отношений A к B и B к C[3]. Мы привели два составных отношения, образованных из величин A, B, C, но совершенно аналогичным образом можно построить и другие составные отношения, образованные из тех же величин.

Доказательство. Для того чтобы измерить эти величины мы предположим, что эта единица измеряет величину E так же, как A измеряет C,[4] единица измеряет величину D так же, как C измеряет B, единица измеряет величину F так же, как A измеряет B. Тогда величина E является количест-

---

[1] Под количеством отношения автор понимает величину, определяемую тем свойством, что данное отношение равно отношению единицы к этой величине, т. е. количеством отношения $\frac{A}{B}$ он считает величину $\frac{B}{A}$.

[2] В подлиннике прямолинейные отрезки, изобращающие величины A, B, C..., изображены не горизонтальными, а вертикальными отрезками, величины A, B C... в подлиннике обозначаются соответственными начальными буквами арабского алфавита ا, ب ,ج...

[3] Для удобства читателя в дальнейшем мы часто будем заменять выражения типа „отношение A к B“ (которые, начиная с предложения V, автор заменяет сокращенными выражениями типа „отношение A B“) современными обозначениями типа $\frac{A}{B}$.

[4] Для удобства читателя в дальнейшем мы часто будем заменять слово „единица“ современным обозначением 1 (в подлиннике это было невозможно по той причине, что цифры 1, 2, 3... там обозначались теми же начальными буквами арабского алфавита, что и обозначения величин А, B, C...).

вом отношения $\frac{A}{C}$, величина D является количеством отношения $\frac{C}{B}$, а величина F является количеством отношения $\frac{A}{B}$.

Поэтому каждое из этих отношений может быть названо числом, измеряемым единицей, так же как предшествующий член отношения измеряется последующим членом.

Так как умножение одного числа на другое есть действие, состоящее в том, что первое число увеличивается во столько же раз, каково второе число, то составление одного отношения из двух других есть действие, состоящее в том, что количество первого отношения увеличивается во столько раз, каково количество второго отношения. Поэтому доказываемая нами теорема может быть записана в виде: величина F является произведением величины E на D[1].

Так как $\frac{A}{C}=\frac{1}{E}$, то, наоборот, $\frac{C}{A}=\frac{E}{1}$; с другой стороны, $\frac{A}{B}=\frac{1}{F}$. По правилу упорядоченного равенства отношений[2] мы получаем, что $\frac{C}{B}=\frac{E}{F}$. Но $\frac{C}{B}=\frac{1}{D}$, вследствие чего $\frac{1}{D}=\frac{E}{F}$, откуда $F\times 1=E\times D$. Но произведение величины на единицу равно самой этой величине, откуда следует, что $F=E\times D$. Таким образом, отношение $\frac{A}{B}$, действительно составлено из отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{C}{B}$, что и требовалось доказать.

Это предложение допускает и другие формулировки.

Если отношение составлено из двух отношений с равными

---

[1] Для удобства читателя в дальнейшем мы часто будем заменять выражения типа „произведение E на D“ современным обозначением $E\times D$, а слово „равно“—современным знаком $=$.

[2] Правило упорядоченного равенства отношений или правило упорядоченной пропорции состоит в том, что из пропорций $\frac{A}{B}=\frac{D}{E}$ и $\frac{B}{C}=\frac{E}{F}$ следует пропорция $\frac{A}{C}=\frac{D}{F}$.

количествами, то отношение называют двойным отношением относительно каждого из этих отношений[1].

Предложение II

Обращая формулировку предыдущего предложения, мы можем сказать, что *если даны три однородные величины, то, составляя новое отношение из отношения первой величины ко второй и отношения второй величины к третьей, мы получим отношение первой величины к третьей.*

$\underline{\quad A \quad}$ $\underline{\quad B \quad}$ $\underline{\quad C \quad}$ $\underline{\text{ единица }}$ $\underline{\quad D \quad}$ $\underline{\quad E \quad}$ $\underline{\quad F \quad}$

Если A, B, C—три однородные величины и $\frac{A}{B}=\frac{1}{E}$. $\frac{B}{C}=\frac{1}{D}$, то я утверждаю, что $\frac{1}{F=E\times D}=\frac{A}{C}$.

Доказательство. Так как $E\times 1=E$, $E\times D=F$, то отношение полученных поверхностей $\frac{E}{F}$ равно отношению их[2] сторон $\frac{1}{D}$. Но $\frac{1}{D}=\frac{B}{C}$, откуда $\frac{E}{F}=\frac{B}{C}$; с другой стороны, $\frac{1}{E}=\frac{A}{B}$. По правилу упорядоченного равенства отношений мы находим, что $\frac{1}{F}=\frac{A}{C}$, т. е., так как $F=E\times D$, получили то, что требовалось доказать.

Иначе. Если обозначить количество отношения $\frac{A}{B}$ через E, количество отношения $\frac{B}{C}$ через D, то величина $E\times F=D$

---

[1] Автор называет „двойным отношением" то, что мы назвали бы „квадратом отношения". Способ выражения автора связан с распространенным в древности и средние века взглядом, согласно которому составное отношение рассматривается как результат „сложения" отношений, разложение отношений как „вычитание" отношений, а составление отношений из двух разных отношений как „удвоение" отношения. По этому поводу см.: Д. Д. Мордухай-Болтовской, Комментарии к I—VI книгам „Начал" Евклида, в книге „Начала" Евклида, ГТТИ, М.—Л. 1948, стр. 409 и И. Ю. Тимченко, Прибавление 13 к книге Фл. Кеджори, История элементарной математики, 2 изд, „Матезис", Одесса, 1917, стр. 402—406.

[2] Автор часто пользуется геометрическим языком, называя произведение двух величин (понимаемых им как прямолинейные отрезки) поверхностью (в подлиннике سطح „сатх"), под которой понимается прямоугольник со сторонами равными данным величинам.

является количеством отношения $\frac{A}{C}$. Величину F можно записать также в виде $F \times 1$ и $1 \times F$. Поэтому $\frac{F}{D} = \frac{E}{1}$, но E—количество отношения $\frac{A}{B}$, откуда $\frac{D}{F} = \frac{A}{B}$. С другой стороны, $\frac{1}{D} = \frac{B}{C}$. По правилу перемешанного равенства отношений[1] мы получим $\frac{1}{F} = \frac{A}{C}$. Таким образом, $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$, что и требовалось доказать.

Предложение III

Эти теоремы, доказанные нами для трех однородных величин, имеют место также для большего числа этих величин.

$$\underline{\quad A \quad} \quad \underline{\quad B \quad} \quad \underline{\quad C \quad} \quad \underline{\quad D \quad}$$

Если A, B, C, D—четыре однородные величины, то я утверждаю, что отношение $\frac{A}{D}$ составлено из отношений $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{C}$ и $\frac{C}{D}$.

Доказательство. Выше мы показали, что отношение $\frac{A}{C}$ составлено из отношений $\frac{A}{B}$ и $\frac{B}{C}$; величины же A, C, D являются однородными величинами и, в силу доказанного выше, отношение $\frac{A}{D}$ составлено из отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{C}{D}$. Поэтому отношение $\frac{A}{D}$ составлено из всех трех этих отношений. Верно и обратное.

В общем случае число отношений всегда должно быть

[1] Правило перемешанного равенства отношений или правило перемешанной пропорций состоит в том, что из пропорций $\frac{A}{B} = \frac{E}{F}$ и $\frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ следует пропорция $\frac{A}{C} = \frac{D}{F}$.

на единицу меньше числа величин, участвующих в этих отношениях, так как каждая величина участвует в нескольких отношениях.

Если все эти отношения равны между собой, обычно говорят, что отношение величины к последней является тройным, четверным и т. д. отношением относительно отношения первой величины ко второй[1].

Предложение IV

Если отношение составлено из нескольких отношений, то всякое равное ему отношение может быть составлено из такого же числа отношений, соответственно равных по своим количествам.

$$\underline{\ A\ }\quad \underline{\ B\ }\quad \underline{\ C\ }\quad \underline{\ D\ }\quad \underline{\ E\ }\quad \underline{\ F\ }$$

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{C}{B}$, а отношение $\frac{E}{F}$ равно отношению $\frac{A}{B}$. Тогда я утверждаю, что отношение $\frac{E}{F}$ может быть составлено из двух отношений, количества которых соответственно равны количествам указанных двух отношений.

Доказательство. Пусть $\frac{A}{C}=\frac{E}{D}$ и, наоборот, $\frac{C}{A}=\frac{D}{E}$. Из этого равенства и равенства $\frac{A}{B}=\frac{E}{F}$ по правилу упорядочного равенства отношений мы получаем, что $\frac{C}{B}=\frac{D}{F}$.

Из того, что $\frac{E}{D}=\frac{A}{C}$ и $\frac{D}{F}=\frac{C}{B}$ следует, что отношение $\frac{E}{F}$ составлено из двух отношений $\frac{E}{D}$ и $\frac{D}{F}$, что и требовалось доказать.

Из этого доказательства ясно, что если отношение, составленное из двух других отношений, равно некоторому

---

[1] Автор называет „тройным", „четверным" и т. д. отношением то, что мы называли бы „кубом", „биквадратом" и т. д. отношения (см. сноску 1 на стр. 23).

отношению и существует такая промежуточная величина, что отношение этой величины к последующему члену этого последнего отношения равно первому составному отношению, то отношение предшествующего числа последнего отношения к этой промежуточной величине равно второму составляющему отношению. Пусть, например, отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{C}{B}$ и равно отношению $\frac{E}{F}$ и существует такая промежуточная величина D, что $\frac{D}{F}=\frac{C}{B}$. Тогда отношение $\frac{E}{F}$ можно разложить на два отношения и, подобно тому как уменьшаемое разделяется на вычитаемое и остаток[1], можно выделить из отношения $\frac{E}{F}$ отношение $\frac{D}{F}$, равное $\frac{C}{B}$, и получить отношение $\frac{E}{D}$, равное $\frac{A}{C}$.

Предложение V

Если некоторые отношения, составляющие некоторое составное отношение, соответственно равны некоторым другим отношением, то данное составное отношение равно отношению, составленному из последних отношений.

A B C D E F G H K L

Пусть, например, отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{A}{C}$ и $\frac{C}{B}$. Пусть, далее, $\frac{D}{E}=\frac{A}{C}$, $\frac{F}{G}=\frac{C}{B}$. Я утверждаю, что отношение $\frac{A}{B}$ составлено также из отношений $\frac{D}{E}$ и $\frac{F}{G}$.

Доказательство. Пусть поверхность, образованная D и F, равна H, поверхность, образованная E и G, равна K и поверхность, образованная E и F, равна L. Из „Начал“ Евклида мы знаем, что отношение поверхностей $\frac{H}{K}$ состав-

[1] Здесь проводится то сравнение разложения отношений с вычитанием, о котором мы говорили в сноске 2 на стр. 23.

лено из отношений $\frac{D}{E}$ и $\frac{F}{G}$. Кроме того, отношение $\frac{H}{L}$ равно $\frac{D}{E}=\frac{A}{C}$, а отношение $\frac{L}{K}$ равно $\frac{F}{G}=\frac{C}{B}$. По правилу упорядоченного равенства получаем $\frac{H}{K}=\frac{A}{B}$. Но отношение $\frac{H}{K}$ составлено из отношений $\frac{D}{E}$ и $\frac{E}{G}$, откуда мы получаем, что отношение $\frac{A}{B}$ составлено также из этих отношений, что и требовалось доказать.

Предложение VI

Составное отношение, составленное из некоторых отношений в определенном порядке, равно составному отношению, составленному из тех же отношений в другом порядке.

A B C D E F G H K L

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$, а отношение $\frac{G}{H}$ составлено из отношений $\frac{E}{F}$ и $\frac{C}{D}$. Я утверждаю, что отношения $\frac{A}{B}$ и $\frac{G}{H}$ равны друг другу.

Доказательство. Пусть отношение $\frac{A}{K}$ равно отношению $\frac{C}{D}$; тогда отношение $\frac{K}{B}$ равно отношению $\frac{E}{F}$. Пусть, далее, отношение $\frac{G}{L}$ равно отношению $\frac{E}{F}$; тогда отношение $\frac{L}{H}$ равно отношению $\frac{C}{D}$. Поэтому $\frac{A}{K}=\frac{L}{H}$, а $\frac{K}{B}=\frac{G}{L}$. Перемножая эти равенства мы получим равенство $\frac{A}{B}=\frac{G}{H}$, что и требовалось доказать.

Это же можно доказать и другим способом: произведение $\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$ равно произведению $\frac{E}{F}\times\frac{C}{D}$, так как поверхность, образованная множимым и множителем, равна поверхности, образованной множителем и множимым; поэтому $\frac{A}{B}=\frac{G}{H}$.

Предложение VII

Если составное отношение составлено из двух отношений, то отношение, обратное и этому отношению, составлено из отношений, обратных к составляющим отношениям.

A B C D E F G

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$. Я утверждаю, что отношение $\frac{B}{A}$ составлено из отношений $\frac{D}{C}$ и $\frac{F}{E}$.

Доказательство. Если отношение $\frac{A}{G}$ равно отношению $\frac{C}{D}$, то отношение $\frac{G}{B}$ равно отношению $\frac{E}{F}$. Но отношение $\frac{B}{A}$ составлено из отношений $\frac{B}{G}$ и $\frac{G}{A}$, т. е. из соответственно равных им отношений $\frac{F}{E}$ и $\frac{D}{C}$[1], что и требовалось доказать.

Предложение VIII

Составное отношение, составленное из двух отношений, равно составному отношению, составленному из отношения предшествующего члена первого отношения к последующему члену второго отношения и из отношения предшествующего члена второго отношения к последующему члену первого отношения.

---

[1] В подлиннике конец этой фразы искажен.

A B C D E F G K L

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$. Я утверждаю, что отношение $\frac{A}{B}$ составлено также из отношений $\frac{C}{F}$ и $\frac{E}{D}$.

Доказательство. Обозначим поверхность, образованную C и E, через G, поверхность образованную F и D, через H, поверхность, образованную F и E, через K и поверхность, образованную E и D, через L. Мы можем представить отношение $\frac{G}{H}$ как составленное из отношений $\frac{G}{K}$ и $\frac{K}{H}$ и как составленное из отношений $\frac{G}{L}$ и $\frac{L}{H}$. В первом случае мы получаем, что отношение $\frac{G}{H}$ составлено из отношений $\frac{C}{F}$ и $\frac{E}{D}$, а во втором случае мы получаем, что то же отношение составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$. Поэтому отношение $\frac{A}{B}$, составленное из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$, составлено также из отношений $\frac{C}{F}$ и $\frac{E}{D}$, что и требовалось доказать.

Таким образом составное отношение не изменяется при перемене местами предшествующих или последующих членов составляющих отношений.

Предложение IX

Тело[1], *образованное предшествующим членом составного отношения, составленного из двух простых отно-*

[1] Пользуясь упоминавшимся нами геометрическим языком (см. сноску 2 на стр. 23), автор называет произведение трех величин (понимаемых им как прямолинейные отрезки) телом(в подлиннике, مجسم „муджассам“), под которым понимается прямоугольный параллелепипед с ребрами, равными данным величинам.

шений, и последующими членами этих отношений, равно телу, образованному последующим членом составного отношения и предшествующими членами простых отношений.

$$\underline{\quad A \quad}\ \ \underline{\quad B \quad}\ \ \underline{\quad C \quad}\ \ \underline{\quad D \quad}\ \ \underline{\quad E \quad}\ \ \underline{\quad F \quad}\ \ \underline{\quad D \quad}\ \ \underline{\quad H \quad}$$

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$. Я утверждаю, что произведение $A \times D \times F$ равно произведению $B \times C \times E$.

Доказательство. Обозначим произведение $C \times E$ через G, а произведение $D \times F$ через H. Тогда отношение $\frac{G}{H}$ будет равно отношению $\frac{A}{B}$, т. е. четыре величины A, B, G, H образуют пропорцию. Поэтому произведение $A \times H$ будет равно произведению $B \times G$. Но так как $H = D \times F$, произведение $A \times H$ равно произведению $A \times D \times F$, а так как $G = C \times E$, произведение $B \times G$ равно произведению $B \times C \times E$. Таким образом, два указанных тела равны друг другу, что и требовалось доказать.

Установился обычай размещать величины, участвующие в этих отношениях в определенном порядке в виде таблицы.

A	B
C	D
E	F

Здесь A, D, F—ребра первого тела; они расположены по первому ряду[1] этой таблицы, являющемся ее диагональю. B, C, E,—ребра второго тела, они расположены по второму ряду таблицы. Здесь A—предшествующий член составного отношения, B—последующий член этого отношения, C—предшествующий член первого простого отношения, D—последующий член этого отношения, E — предшествующий член второго простого отношения, F—последующий член этого отношения.

Если из четырех величин, образующих пропорцию, одна величина является неизвестной, ее можно определить с помощью остальных трех величин посредством операций умножения и деления. Поэтому если из наших шести вели-

[1] В подлиннике حيز (хаййиз), дословно—„место, пространство"

чин одна величина является неизвестной, ее можно определить с помощью остальных пяти величин.

Имеются два пути для определения этой неизвестной величины, один из которых более сложен, а другой—более прост.

Более сложный путь состоит в следующем. Для определения неизвестной величины надо знать, в каком ряду находится эта величина и разделить тело, образованное величинами другого ряда, на поверхность, образованную остальными двумя величинами первого ряда. Полученное частное равно искомой величине[1].

Второй путь имеет две разновидности.

Первая из этих разновидностей состоит в том, что сначала определяется членом какого из трех данных отношений является неизвестная величина, а затем в остальных отношениях соответственные члены делятся друг на друга, в результате чего находят количества этих отношений.

Если неизвестная величина входит в составное отношение, то количество этого отношения равно поверхности, построенной на количествах остальных двух отношений.

Если неизвестная величина входит в одно из простых отношений, то количество этого отношения равно частному от деления количества составного отношения на количество известного простого отношения.

Таким образом мы найдем количество отношения, содержащего неизвестное. Но отношение единицы к количеству отношения равно отношению члена этого отношения, соответствующего единице, к другому члену. Из равенства этих отношений мы и найдем искомую величину.

Например, пусть неизвестной является величина A. Тогда сначала разделим величину D на величину C; полученное частное G является количеством первого отношения. Затем разделим величину F на величину E; полученное частное H является количеством второго отношения. Затем найдем поверхность, образованную этими двумя количествами. Пусть эта поверхность будет K. Тогда отношение количества отношения $\frac{A}{B}$ к величине B равно отношению единицы к величине A. Потому отношение $\frac{A}{B}$ равно отноше-

---

[1] Т. е. если, например, в составном отношении $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \times \frac{E}{F}$ неизвестна величина D, то она равна частному $\frac{B \times C \times E}{A \times F}$.

нию $\frac{1}{K}$ и для нахождения величины A надо разделить величину B на величину K.

Ясно, что рассматриваемая нами операция состоит из двух делений и двух умножений или из трех делений и одного умножения и сводится к определению известной величины из четырех пропорциональных величин.

При этом в случае умножения отношение единицы и множителя равно отношению множимого к произведению, а в случае деления отношение единицы к частному равно отношению делителя к делимому.

Точно также, если делится C на D и E на F, в составном отношении единица будет соответствовать величине B. Все случаи имеют следующий вид:

Сложное отношение		Сложное отношение	
A	B	A	B
1	K	K	1
Первое отношение		Первое отношение	
C	D	C	D
1	G	G	1
Второе отношение		Второе отношение	
E	F	E	F
1	H	H	1

Вторая разновидность второго пути сводится к трем приемам.

1) Находится такая величина, промежуточная между обоими членами составного отношения, что отношение одного из этих членов к этой промежуточной величине равно одному из простых отношений. Эта величина определится из четырех пропорциональных величин, так как отношение известного члена составного отношения к промежуточной величине равно отношению одного известного члена одного из простых отношений к другому члену.

Пример: составим таблицу из семи величин.

A	G	B
C	D	
	E	F

Если неизвестна величина A, то так как отношение величины G, промежуточной между A и B, к величине B равно отношению $\frac{E}{F}$, мы определим величину G с помощью величин B, E, F [а зная G мы определим величину A с помощью величин G, C, D][1].

Если неизвестна величина E, то отношение $\frac{A}{G}$ равно отношению $\frac{C}{D}$ и величина G определится с помощью величин A, C, D [а зная G мы определим величину E с помощью величин G, B, F][2].

Определение остальных неизвестных производится по тому же правилу. Каждая из этих операций содержит два умножения и два деления. Подробности этих операций приведены в следующей таблице:

Неизвестные	Множимые	Умножить на	Разделить на	Получится	Новые множимые	Умножить на	Разделить на	Получится
A	B	E	F	G	G	C	D	A
B	A	D	C	G	G	F	E	B
C	B	E	F	G	A	D	G	C
D	B	E	F	G	G	C	A	D
E	A	D	C	G	G	F	B	E
F	A	D	C	G	B	E	G	F

Выполнив два умножения и два деления в этом порядке, мы найдем искомую величину.

2) Для первого отношения находится такая третья величина, последующая за обоими членами этого отношения, что отношение последующего члена первого отношения к этой величине равно отношению предыдущего члена второго отношения и последующему члену этого отношения.

В этом случае операции производятся по тому же правилу, что и выше.

3) Для второго отношения находится такая третья величина, предшествующая обоим членам этого отношения, что отношение этой величины к предшествующему члену второго отношения равно отношению предыдущего члена первого отношения и последующему члену этого отношения. В этом случае операции также производятся по такому же

[1,2] Предложения в скобках добавлены редакцией перевода.

правилу, что и выше. Лица, владеющие этим искусством, составили для этой цели следующие две таблицы:

Неизвестные	Множимые	Умножить на	Разделить на	Частное умножить на	Разделить на
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
B	*A*	*D*	*C*	*F*	*E*
C	*A*	*F*	*E*	*D*	*B*
D	*B*	*E*	*F*	*C*	*A*
E	*A*	*D*	*C*	*F*	*B*
F	*B*	*C*	*D*	*E*	*A*

Неизвестные	Множимые	Умножить на	Разделить на	Частное умножить на	Разделить на
A	*C*	*E*	*F*	*B*	*D*
B	*D*	*F*	*E*	*A*	*C*
C	*A*	*F*	*B*	*D*	*E*
D	*B*	*E*	*A*	*C*	*F*
E	*A*	*D*	*B*	*F*	*C*
F	*B*	*C*	*A*	*E*	*D*

Сказанного нами вполне достаточно для проницательного человека.

Предложение X

Если отношение составлено из двух отношений, то отношение одной из величин, находящейся в первом ряду, к одной из величин, находящейся во втором ряду, равно составному отношению, составленному из двух отношений, образованных из остальных четырех величин, причем предшествующие члены этих двух отношений входят во второй ряд, а члены этих двух отношений входят в первый ряд.

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$. Я утверждаю, что отношение одной из величин A, D, F к одной из величин B, C, E составлено из двух отношений, образованных остальными четырьмя величинами при указанных выше условиях. Например, отношение $\frac{A}{B}$ составлено из двух отношений, образованных величинами C, D, E, F. Но величины B, E входят в тот же ряд, что и C, а величины D, F входят в тот же ряд, что и A, вследствие чего наша теорема приобретает следующий вид: отношение $\frac{A}{C}$ составлено из отношений $\frac{B}{D}$ и $\frac{E}{F}$ или из отношений $\frac{B}{F}$ и $\frac{E}{D}$.

Доказательство. Примем величину A за высоту тела $A \times D \times F$, поверхность $D \times F$—за основание этого тела, величину C—за высоту тела $B \times C \times E$, а поверхность $B \times E$—за основание этого тела.

В этом случае отношение $\frac{A}{C}$ равно отношению оснований $\frac{B \times E}{D \times F}$, так как в предложениях 34 и 35 книги XI „Начал" Евклида показано, что отношение высот двух равных тел равно обратному отношению их оснований. Но отношение поверхностей $\frac{B \times F}{D \times E}$ является или произведением отношений $\frac{B}{D}$ и $\frac{E}{F}$ или произведением отношений $\frac{B}{F}$ и $\frac{E}{D}$, а значит, этим произведениям равно отношение $\frac{A}{C}$; аналогично поступаем в случае других величин, в результате чего получаем то, что и требовалось доказать.

При этом необходимо учесть, что отношения оснований одного тела к основаниям другого тела могут быть определены девятью способами.

Далее, предшествующий и последующий члены каждого отношения можно поменять местами с соответственными членами другого отношения. Таким образом, число этих отношений достигает восемнадцати.

Далее, если мы примем величины, входящие во второй ряд, за величины, входящие в первый ряд, общее число отношений достигнет тридцати шести. Половина из этих отношений является обратной для другой половины.

Таким образом с каждым составным отношением связано еще тридцать пять отношений. Эти отношения приведены нами в следующих таблицах:

Номер	Составное отношение		Составляющие отношения			
			первое		второе	
	предш. член	послед. член	предш. член	послед. член	предш. член	послед. член
1	A	B	C	D	E	F
2	A	B	C	F	E	D
3	A	C	B	D	E	F
4	A	C	B	F	E	D
5	A	E	B	D	C	F
6	A	E	B	F	C	D
7	D	B	C	A	E	F
8	D	B	C	F	E	A
9	D	C	B	A	E	F
10	D	C	B	A	E	F
11	D	E	B	A	C	F
12	D	E	B	F	C	A
13	F	B	C	A	E	D
14	F	B	C	D	E	A
15	F	C	B	A	E	D
16	F	C	B	D	E	A
17	F	E	C	D	B	A
18	F	E	C	A	B	D

Номер	Составное отношение		Составляющие отношения			
			первое		второе	
	предш. член	послед. член	предш. член	послед. член	предш. член	послед. член
1	B	A	D	C	F	E
2	B	A	D	E	F	C
3	B	D	A	C	F	E
4	B	D	A	E	F	C
5	B	F	A	C	D	E
6	B	F	A	E	D	C
7	C	A	D	B	F	E
8	C	A	D	E	F	B
9	C	D	A	B	F	E
10	C	D	A	E	F	B
11	C	F	A	B	D	E
12	C	F	A	E	D	B
13	E	A	D	B	F	C
14	E	A	D	C	F	B
15	E	D	A	B	F	C
16	E	D	A	C	F	B
17	E	F	D	C	A	B
18	E	F	D	B	A	C

Если, далее, изменить порядок простых отношений, число отношений снова удвоится и достигнет семидесяти двух.

Предложение XI

Если две величины, входящие в два ряда, образованные из величин, участвующих в составном отношении, составленном из двух отношений, равны друг другу, то остальные четыре величины образуют пропорцию. При этом в каждом ряду должно остаться по одному предшествующему и по одному последующему члену.

Например, пусть отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$ и входящая в первый ряд величина A равна входящей во второй ряд величине C. Я утверждаю, что из величин B, D, E, F можно образовать два равных отношения, а именно: предшествующим членом одного из этих отношений является одна из величин B, E, входящих во второй ряд, а последующим членом этого отношения является одна из величин D, F, входящих в первый ряд, и наоборот, например $\frac{B}{D}=\frac{F}{E}$, $\frac{B}{F}=\frac{D}{E}$ и т. д.

Доказательство. В предложении 33 книги XI „Начал“ Евклида доказывается, что если два тела с равными высотами находятся в некотором отношении, то основания этих тел находятся в том же отношении. Рассмотрим две равные величины, входящие в два разные тела. Примем эти равные величины за высоты наших тел. Но отношение высот здесь равно отношению оснований[1] и так как высоты равны друг другу, основания так же должны быть равны друг другу. Но если основания равны друг другу, их стороны составляют пропорцию, что и требовалось доказать.

A		B
C	D	
	E	F

Из сказанного нами ясно, что из величин, участвующих в составном отношении, взятых по четыре, можно образовать девять простых отношений; эти отношения образованы

[1] В этом случае высота первого тела относится к высоте второго тела как основание второго тела относится к основанию первого тела.

величинами, взятыми попарно из двух рядов. Все они могут быть записаны в виде одной таблицы, имеющей следующий вид:

Номер	Равные величины		Четыре пропорциональные величины			
			первое отношение		второе отношение	
	первая	вторая	предш. член	послед. член	предш. член	послед. член
1	A	B	C	D	F	E
2	A	C	B	D	F	E
3	A	E	B	D	F	C
4	D	B	A	C	E	F
5	D	C	A	E	B	F
6	D	E	A	B	C	F
7	F	B	A	C	E	E
8	F	C	A	B	E	E
9	F	E	A	B	C	E

Например, пусть отношение $\frac{D}{G}$ равно отношению $\frac{E}{F}$. Тогда, составляя наши равенства, мы можем утверждать, что отношение $\frac{A}{B}$ равно отношению $\frac{C}{G}$. Если мы примем, что $A = C$, мы получим $B=G$. Поэтому, если отношение $\frac{C}{D}$ равно отношению $\frac{F}{E}$, должно быть также $\frac{B}{D} = \frac{F}{E}$, что и требовалось доказать.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A & H & B \\ C & D & G \\ & E & F \end{array}}$$

Примем теперь, что $B=D$. Из $\frac{H}{B} = \frac{E}{F}$ получим $\frac{A}{H} = \frac{C}{D}$, т. е. при нашем условии $\frac{A}{H} = \frac{C}{B}$. Отсюда следует, что $\frac{A}{C} = \frac{H}{B}$, т. е. $\frac{A}{C} = \frac{E}{F}$, что и требовалось доказать.

В остальных случаях поступают аналогичным образом[1].

[1] В подлиннике эти два примера приведены после предложения XII.

Предложение XII

Если две равные величины входят в один ряд, остальные величины не образуют пропорции. Это предложение является непосредственным следствием предыдущего предложения[1].

Предложение XIII

Всякое простое отношение можно рассматривать как составное отношение; одно из составляющих отношений совпадает с данным отношением, а второе является тождественным отношением.

Пусть, например, $\frac{A}{B}$ — простое отношение. Я утверждаю, что отношение $\frac{A}{B}$ можно представить как определенное выше составное отношение.

A		B
C	E	D

Доказательство. Пусть отношение $\frac{A}{B}$ равно отношению $\frac{C}{D}$, а величина E равна величине D. В этом случае отношение $\frac{C}{D}$ составлено из отношения $\frac{C}{E}$ и отношения $\frac{E}{D}$, являющегося тождественным отношением. Таким образом $\frac{A}{B}$ составлено из указанных двух отношений, что и требовалось доказать.

Обратно, всякое отношение, составленное из самого себя и тождественного отношения, равно простому отношению,

---

[1] Мы уже видели, что из равенства $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}$ следует равенство $A\times D\times F=B\times C\times E$ и если равны два сомножителя в разных частях этого равенства, мы можем сократить эти сомножители, после чего получим равенство двух произведений двух сомножителей, откуда следует, что эти четыре величины составляют пропорцию. Если же равны два сомножителя в одной части этого равенства, мы не можем сократить эти выражения и получить равенство, содержащее четыре величины, определяющие пропорциональность этих величин.

равному этому составному отношению, доказательство чего вытекает из сказанного выше. Поэтому тождественное отношение равно составному отношению, составленному из нескольких тождественных отношений.

Предложение XIV

Тождественное отношение составлено из произвольного отношения и отношения обратного к нему.

Пусть отношение $\frac{A}{B}$ является тождественным отношением, отношение $\frac{C}{D}$ — произвольное отношение, отношение $\frac{F}{E}$ равно отношению $\frac{C}{D}$. Я утверждаю, что отношение $\frac{A}{B}$ составлено из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$[1].

Доказательство. Пусть величина G равна величине C.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} A & & B \\ C & D & G \\ & E & F \end{array}}$$

Отношение $\frac{C}{D}$ равно отношению $\frac{F}{E}$, вследствие чего отношение $\frac{D}{G=C}$ равно $\frac{E}{F}$. Поэтому отношение $\frac{C}{G}$ является тождественным, составленным из отношений $\frac{C}{D}$ и $\frac{E}{F}$, а отношение $\frac{A}{B}$ составлено из тех же отношений. Ясно, что одно из этих отношений обратно другому, что и требовалось доказать.

Этим мы заканчиваем наше рассмотрение составных отношений.

---

[1] В подлиннике пропущено отношение $\frac{E}{F}$.

КНИГА ВТОРАЯ

О ПЛОСКОМ ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКЕ И ИМЕЮЩИХСЯ В НЕМ ОТНОШЕНИЯХ

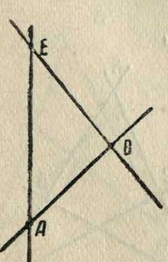
В этой книге содержится 11 глав

Глава I,

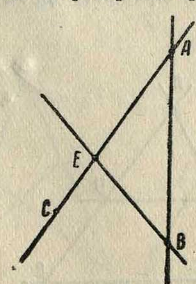
в которой коротко говорится о том, что такое плоский полный четырехсторонник, о его различных видах и о имеющихся в нем отношениях

П л о с к и м п о л н ы м ч е т ы р е х с т о р о н н и к о м называется фигура, образованная четырьмя прямыми линиями, пересекающимися попарно так, что в одной и той же точке пересекается не более двух линий. Этот полный четырехсторонник называется плоским, так как, кроме плоскости, он не может быть расположен ни на какой поверхности.

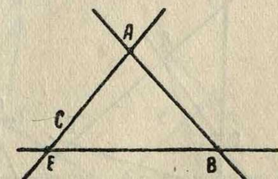
Люди этой науки утверждают, что эта фигура может иметь только двенадцать видов, ни одним больше, ни одним меньше. Они обосновывают это следующим образом: если две прямые линии AB и AC, пересекающиеся в точке A, пересекаются третьей линией, которая пересечет AB в точке, отличной от A, например в B, и если продолжить эту линию до тех пор, пока она пересечет AC в другой точке, отличной от C, например в E, то эта точка E попадает или вне части, заключенной между A и C со стороны A, или между A и C, или же, наконец, вне этих точек со стороны C, что дает следующие три рода расположения:



I



II

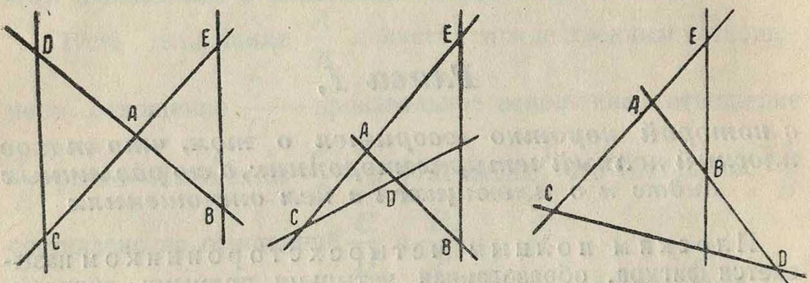


III

Пусть теперь четвертая линия CD пересекает эти три линии, а именно: линию AC в точке C, а линию AB в точке D. Эта точка D попадет вне части AB со стороны A, или между A и B, или же вне части AB со стороны B. Таким образом каждый из трех предыдущих родов подразделяется на следующие три вида:

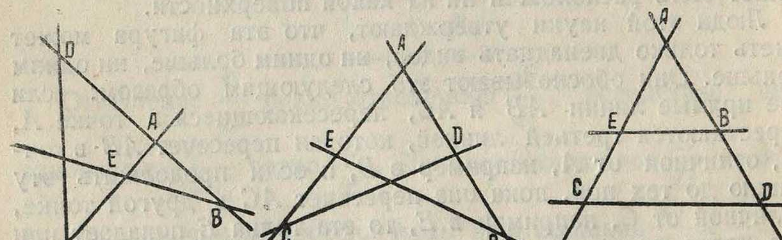
Виды первого рода

1 2 3



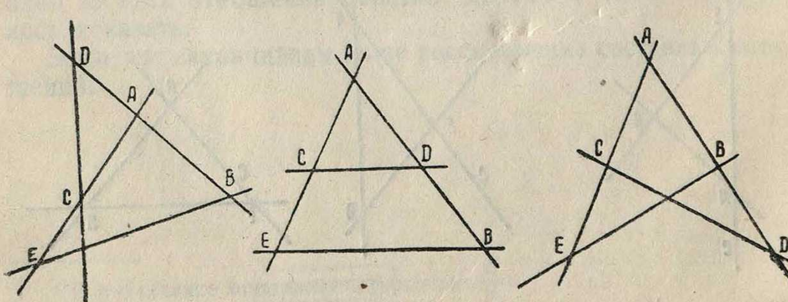
Виды второго рода

1 2 3



Виды третьего рода

1 2 3

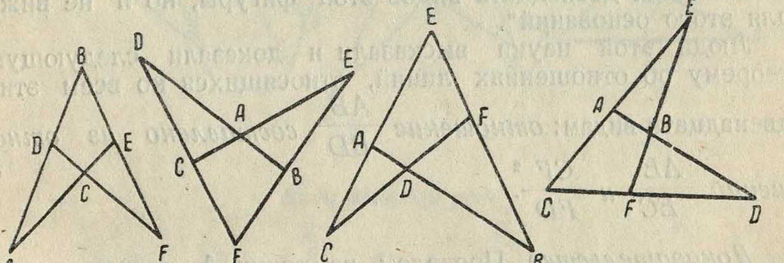


Во всех этих видах расположения рассматриваются пересечения линий AB и AC, AB и BE, AC и CD и не рассматривается пересечение линий BE и CD. Рассмотрим теперь то пересечение. Пусть точка пересечения двух последних линий будет F. В этом случае 1-й вид первого рода, 3-й вид второго рода и 2-й вид третьего рода по расположению точек B и E подразделяются на два; кроме этих случаев другие подразделения невозможны, так как в случаях 2-го вида первого и второго родов и в случае 1-го вида третьего рода точка F обязательно должно находиться между точками B и E, а в случаях 3-го вида первого и третьего родов и в случае 1-го вида второго рода линий CD и AB обязательно должны пересечься линией BE до своего пересечения. Поэтому другие виды пересечения невозможны.

Из сказанного ясно, что общее число видов пересечения равно двенадцати. Приведем эти виды.

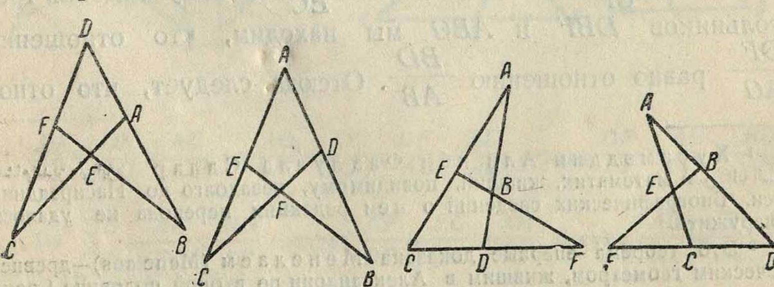
Виды первого рода

1 *2* *3* *4*



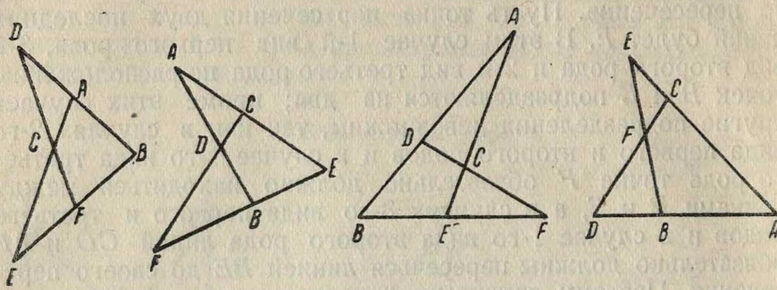
Виды второго рода

1 *2* *3* *4*



Виды третьего рода

1 2 3 4



Хусамэддин Али ибн Фазлулла Салар[1], считающий себя выдающимся знатоком этой науки, упустил из вида три последних случая. Он утверждал, что „эта фигура имеет всего девять видов, ни одной больше, ни одной меньше“, а также говорил, что „некоторые геометры утверждают, что имеется двенадцать видов этой фигуры, но я не вижу для этого оснований“.

Люди этой науки высказали и доказали следующую теорему об отношениях линий, относящихся ко всем этим двенадцати видам: *отношение* $\frac{AB}{BD}$ *составлено из отношений* $\frac{AE}{EC}$ *и* $\frac{CF}{FD}$[2].

Доказательство. Проведем из точки A линию, параллельную линии CD, и продолжим эту линию до ее пересечения с линией BE. Обозначим эту линию AG. Тогда в силу подобия треугольников AEG и CEF, мы находим, что отношение $\frac{AG}{CF}$ равно отношению $\frac{AE}{EC}$. В силу подобия треугольников DBF и ABG мы находим, что отношение $\frac{DF}{AG}$ равно отношению $\frac{BD}{AB}$. Отсюда следует, что отно-

[1] Хусамэддин Али ибн Фазлулла Салар حسام الدين على ابن فضل الله السالار математик, живший, повидимому, незадолго до Насирэддина Туси. Биографических сведений о нем редакции перевода не удалось обнаружить.

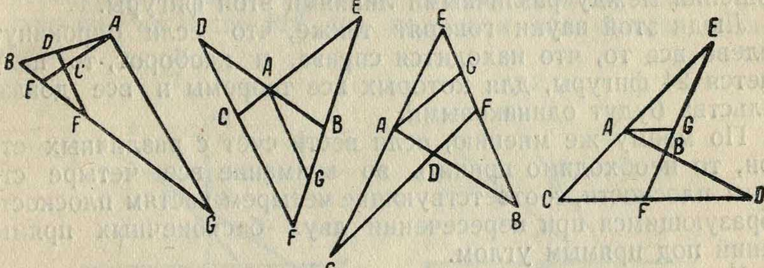
[2] Это теорема впервые доказана Менелаем (Menelaos)—древнегреческим геометром, жившим в Александрии во второй половине I века н. э., в его трактате „Сферика“ („Sphairika“) в настоящее время известна под названием теоремы Менелая.

шение $\frac{DF}{CF}$ составлено из отношений $\frac{AE}{EC}$ и $\frac{BD}{AB}$[1]. Поэтому отношение $\frac{AB}{BD}$ составлено из отношений $\frac{AE}{EC}$ и $\frac{CF}{FD}$[2], что и требовалось доказать.

После проведения параллельной линии наши двенадцать видов пересечения приобретают следующий вид:

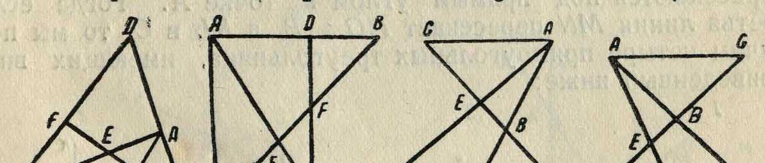
Виды первого рода

1 2 3 4



Виды второго рода

1 2 3 4



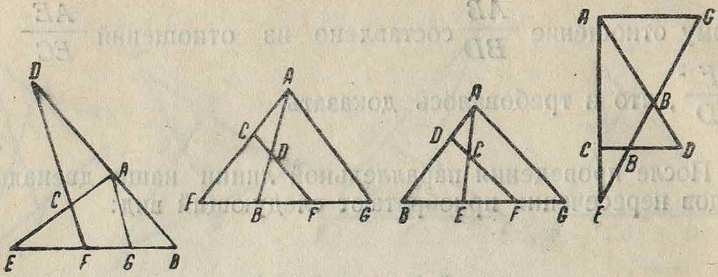
---

[1] $\frac{DF}{CF}=\frac{DF}{AG}\times\frac{AG}{CF}$, но $\frac{AG}{CF}=\frac{AE}{EC}$ и $\frac{DF}{AG}=\frac{BD}{AB}$, откуда $\frac{DF}{CF}=\frac{AE}{EC}\times\frac{BD}{AB}$.

[2] Из $\frac{DE}{CF}=\frac{AE}{EC}\times\frac{BD}{AB}$ следует $\frac{CF}{DF}=\frac{EC}{AE}\times\frac{AB}{BD}$, откуда $\frac{AB}{BD}=\frac{CF}{DF}:\frac{EC}{AE}$ т. е. $\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{EC}\times\frac{CF}{DF}$.

Виды третьего рода

1 2 3 4



Аналогичным образом можно установить и другие отношения между различными линиями этой фигуры.

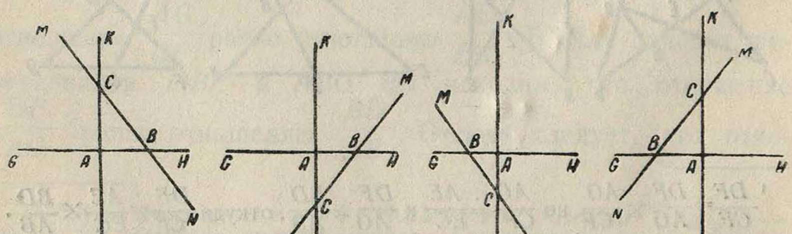
Люди этой науки говорят также, что если опрокинуть налево все то, что находится справа, и наоборот, то получается 24 фигуры, для которых все теоремы и все доказательства будут одинаковыми.

По моему же мнению, если вести счет с различных сторон, то необходимо принять во внимание все четыре стороны плоскости, соответствующие четырем частям плоскости, образующимся при пересечении двух бесконечных прямых линий под прямым углом.

Хотя рассмотрение этого вопроса представляет собой излишний труд для читателя, мы все же рассмотрим его здесь.

Допустим, что две бесконечные прямые линии HG и KL пересекаются под прямым углом в точке A. Тогда если третья линия MN пересекает HG в B, а KL в C, то мы получим четыре прямоугольных треугольника, имеющих вид, приведенный ниже:

1 2 3 4

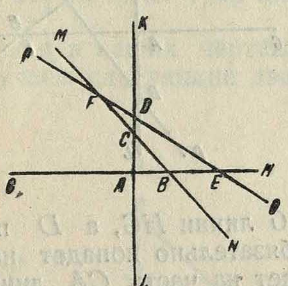


В каждом из этих случаев каждая линия делится на три части: например в 1-м случае, $HG=HB+BA+AG$, $KL=KC+CA+AL$, $MN=MC+CB+BN$ и т. д.

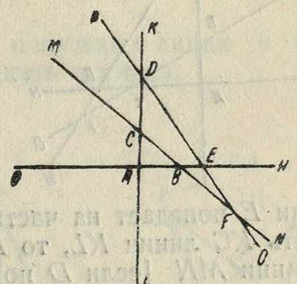
Пусть теперь четвертая линия, например линия PO, пересекает линию HG в точке E; эта точка E обязательно попадет на одну из указанных нами трех частей линии HG.

Пусть этой частью будет линия BH. Линия PO пересечет также линию KL в некоторой точке D, которая попадет на одну из трех частей, на которые разделена KL; пусть этой частью будет линия CK. Наконец, линия PO пересечет также линию MN в некоторой точке F. Но здесь эта точка может попасть как на часть MC, так и на часть BN, т. е. мы получили то, что можно назвать случаем раздвоения, так как точка D в обоих случаях попадает на часть KC. Если же эта точка D попадает на линию CA, то линия MN обязательно пересечется на своей части BC; точно также, если точка D попадет на часть AL, то линия MN обязательно пересечется на своей части BN. Таким образом, если точка E попадает на часть BH, мы получаем следующие четыре случая.

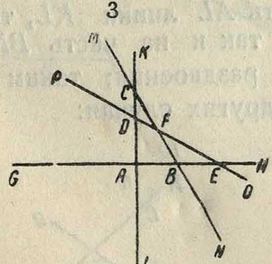
1



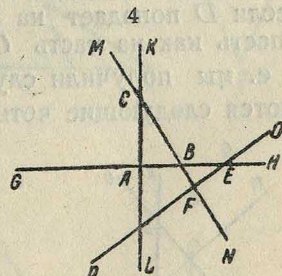
2



3

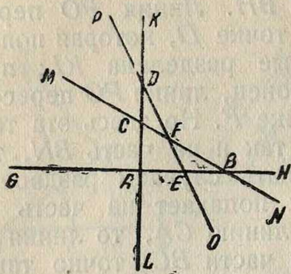


4

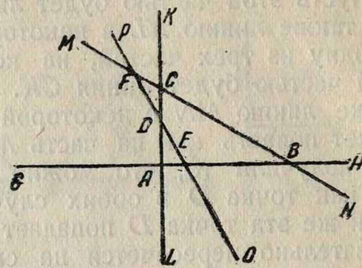


Если E попадает на часть AB линии HG, а D попадает на часть KC линии KL, то F обязательно попадает на часть BC линии MN; если D попадает на часть AC линии KL, то F может попасть как на часть CM, так и на часть BN линии MN, т. е. мы получили случай раздвоения; наконец, если D попадает на часть AL линии KL, то F обязательно попадает на часть BC линии MN. Таким образом мы получаем следующие четыре других случая:

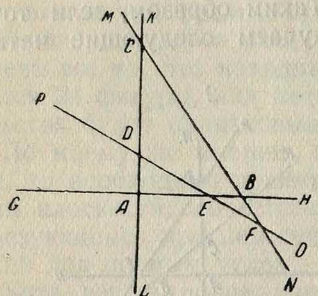
5



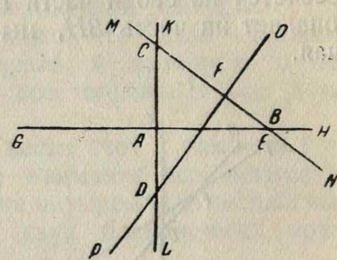
6



7

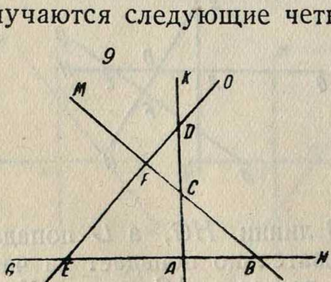


8

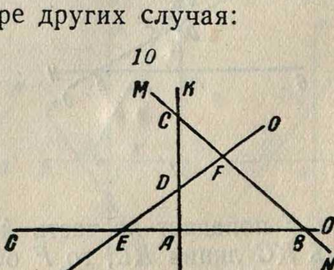


Если E попадает на часть AG линии HG, а D попадает на часть KC линии KL, то F обязательно попадет на часть MC линии MN [если D попадает на часть CA линии KL, то F обязательно попадет на часть BC линии MH, и наконец],[1] если D попадает на часть AL линии KL, то F может попасть как на часть CM, так и на часть BN линии MN, т. е. мы получили случай раздвоения; таким образом получаются следующие четыре других случая:

9

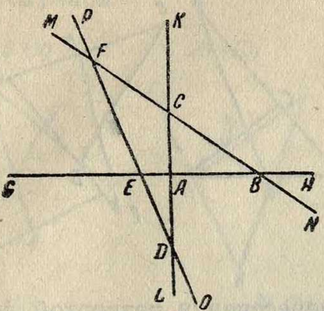


10

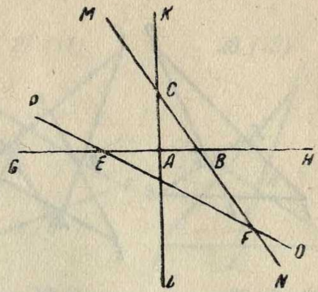


[1] Предложение в скобках добавлено редакцией перевода.

11



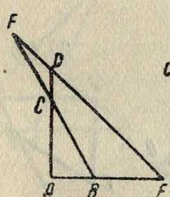
12



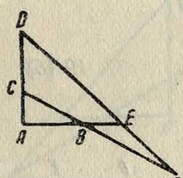
Таковы двенадцать случаев, получающихся при различных пересечениях четвертой линии с тремя другими, составляющими первый из четырех рассмотренных нами выше случаев пересечения трех линий.

Опуская в наших чертежах ненужные линии и буквы, мы получаем следующие двенадцать случаев:

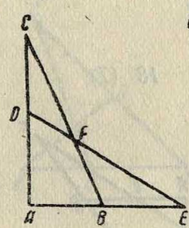
1



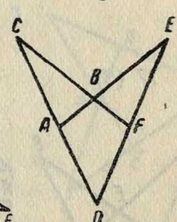
2



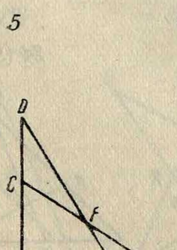
3



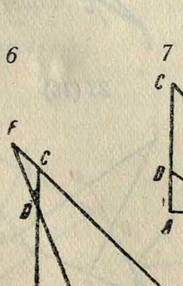
4



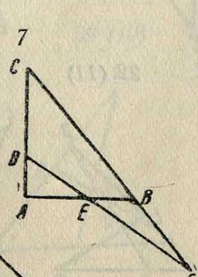
5



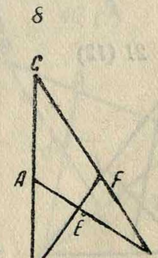
6



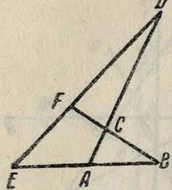
7



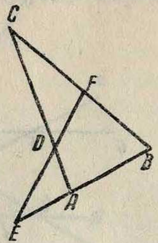
8



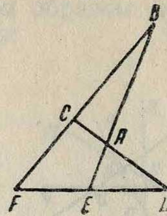
9



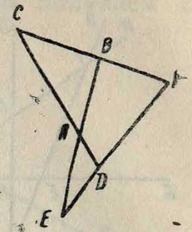
10



11

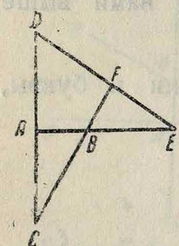


12

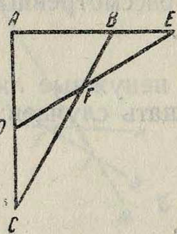


Если теперь мы рассмотрим пересечения четвертой линии во втором из первых четырех случаев, мы получим новые двенадцать случаев каждый из которых будет соответствовать одному из указанных выше двенадцати случаев:

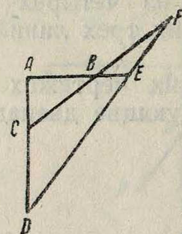
13 (4)



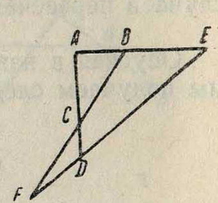
14 (3)



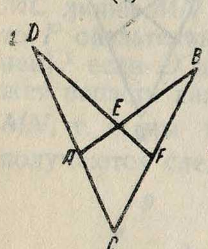
15 (2)



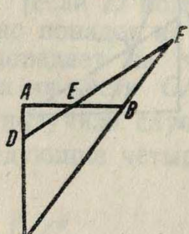
16 (1)



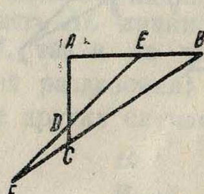
17 (8)



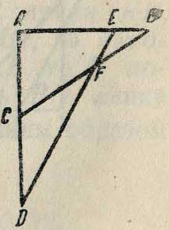
18 (7)



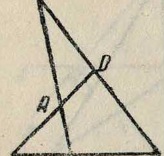
19 (6)



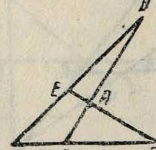
20 (5)



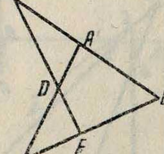
21 (12)



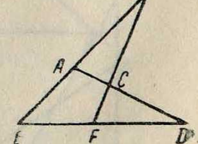
22 (11)



23 (10)

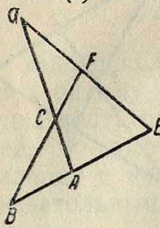


24 (9)

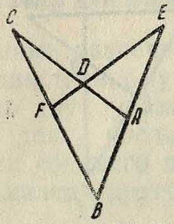


То же самое мы получим для третьего из первых четырех случаев.

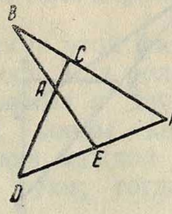
25 (9)



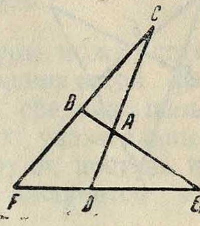
26 (10)



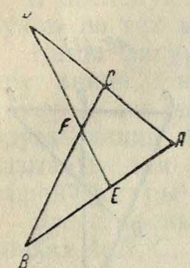
27 (11)



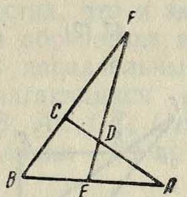
28 (12)



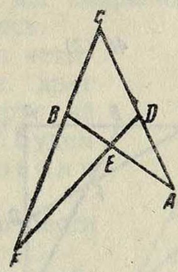
29 (5)



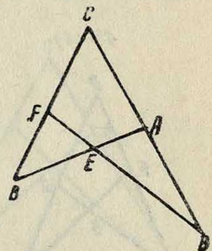
30 (6)



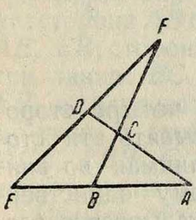
31 (7)



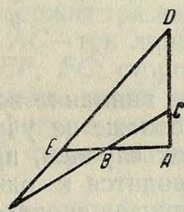
32 (8)



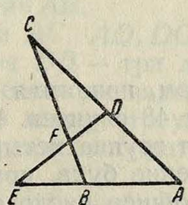
33 (1)



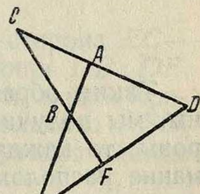
34 (2)



35 (3)

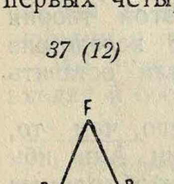


36 (4)

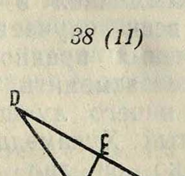


И, наконец, то же самое мы получим для четвертого и первых четырех случаев.

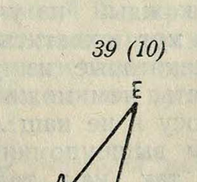
37 (12)



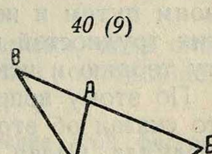
38 (11)



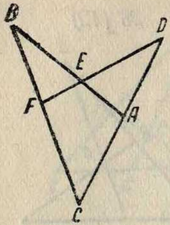
39 (10)



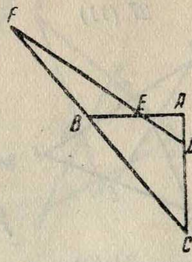
40 (9)



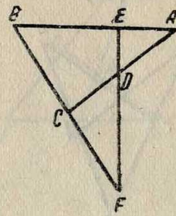
41 (8)



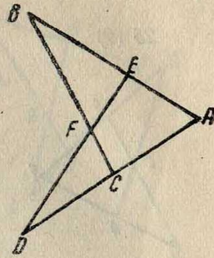
42 (7)



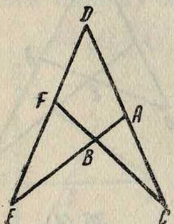
43 (6)



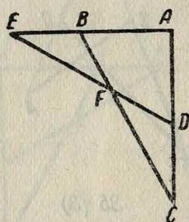
44 (5)



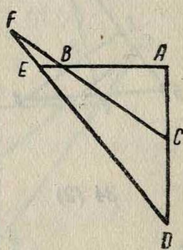
45 (4)



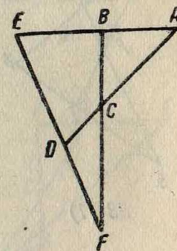
46 (3)



47 (2)



48 (1)



Таким образом, принимая во внимание все четыре стороны, мы получим 48 случаев. Если же не учитывать эти стороны, то каждая группа четырех случаев, принимая во внимание расположение букв, приводится к одному единственному случаю и общее число случаев снова оказывается равным 12.

Вследствие большого числа отношений, имеющих место между различными линиями, и многочисленности случаев и их доказательств, каждый из ученых шел в этой теории своим путем и не мог охватить всех случаев; вследствие этих трудностей некоторые из ученых предпочли оставить эту теорию и искать, чем можно ее заменить.

По этому вопросу я не нашел ничего лучшего, чем то, что сказал об этом вышеупомянутый Хусамэддин Али ибн Фазлулла Салар, так как только он дал необходимые правила для всех случаев, хотя и не привел их доказательств и примеров.

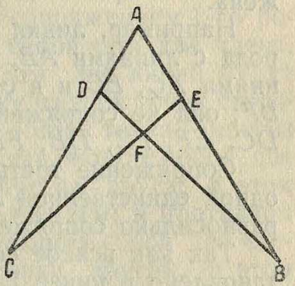
В настоящем труде я собираюсь изложить то, что он сказал об этом, а также добавить мои собственные мысли по некоторым вопросам.

Глава II,

в которой говорится о теоремах об отношениях между линиями этой фигуры

Многочисленные разновидности этой фигуры можно свести к одному единственному виду. Для получения этой фигуры достаточно двух указательных и двух средних пальцев. В самом деле, соедини концы двух указательных пальцев и конец среднего пальца каждой руки, поставь на указательный палец другой руки; тогда получится эта фигура.

В последующем изложении мы сохраним те же самые буквы на тех местах, что и здесь.



Наша фигура образована из четырех линий, не параллельных друг другу и не налагающихся друг на друга—линий AB, AC, CE, DB. Будем называть эти линии **сторонами** нашей фигуры[1].

Эти стороны пересекаются в шести точках A, B, C, D, E, F.

Каждая сторона содержит в себе три линии, определяемые тремя точками: сторона AB содержит три линии AB, AE, EB; сторона AC—три линии AC, AD, DC; сторона EC—три линии: EC, EF, FC; сторона DB — три линии DB, DF, FB, и, следовательно, всего имеется двенадцать линий. Кроме того в этой фигуре имеется четыре треугольника ABD, ACE, FEB, CDF, сторонами которых служат рассмотренные выше линии.

Четыре стороны нашей фигуры, взятые попарно, дают шесть пар AB и BD; AB и AC; AB и CE; BD и AC; BD и CE; AC и CE, причем между двумя сторонами каждой из этих пар содержатся две из двенадцати линий. Кроме того, каждая из этих двенадцати линий **сопряжена**[2] с пятью линиями и не сопряжена с шестью другими.

Мы будем называть две линии сопряженными, если они входят в составное отношение или в простые отношения,

---

[1] В соответствии с тем, что мы переводим название этой фигуры выражением „полный четырехсторонник" (см. сноску 1 на стр. 19), мы переводим название четырех прямых линий, составляющих эту фигуру, словами „стороны". В подлиннике сторона полного четырехсторонника всегда называется словом ركن (рукун) „основная часть, устой, опора, фундамент, столб, колонна".

[2] Мы переводим словом „сопряженный" арабское слово مشارك (мушарик), дословно—„соучастник".

составляющие это составное отношение, в качестве предшествующего и последующего членов, а несопряженными отрезками—те отрезки, которые не образуют таких отношений.

Сопряжение между двумя линиями может быть трех родов:

1) когда одна линия находится на продолжении другой; 2) когда они являются сторонами угла треугольника; 3) когда они находятся между двумя сторонами фигуры. Ясно, что каждая линия находится с двумя из пяти сопряженных с ней линий в сопряжении первого рода, с другими двумя—в сопряжении второго рода и с одной—в сопряжении третьего рода; с шестью остальными линиями эта линия не сопряжена.

Например, линия AE находится в сопряжении первого рода с линиями AB, EB, в сопряжении второго рода с линиями AC, EC и в сопряжении третьего рода с отрезком DF; она не сопряжена с остальными шестью линиями AD, DC, EF, FC, DB, FB.

Сопряжение третьего рода, являющееся сопряжением с одной единственной линией, как мы увидим в дальнейшем, равносильно сопряжению с двумя линиями.

Так как всякое составное отношение, как это было установлено в книге I, содержит шесть членов, в этом отношении участвуют шесть линий фигуры, остальные остаются неучаствующими.

В этом случае три из этих последних линий всегда находятся на одной и той же стороне фигуры, которую мы будем называть неучаствующей стороной, в то время как три другие линии образуют треугольник, который мы будем называть неучаствующим треугольником.

Что касается шести линий, образующих составное отношение, то два члена как составного отношения, так и каждого из двух простых отношений обязательно будут находиться в сопряжении одного из трех родов.

Если пары членов каждого из трех отношений находятся в сопряжении одного и того же рода, будем называть эти отношения регулярными, в противоположном случае мы будем называть эти отношения смешанными.

Кроме того заметим, что три линии, входящие в один и тот же ряд[1] составного отношения, всегда не сопряжены друг с другом.

Будем называть теоремой 1-го, 2-го и 3-го рода теорему о составном отношении, два члена которого находятся меж-

---

[1] См. предложение IX книги I.

ду собой в сопряжении соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода.

Каждая из этих теорем подразделяется на большое число разновидностей, одни из которых относятся к регулярным отношениям, а другие к смешанным. Основой теории является теорема 1-го рода в регулярном случае. Остальные случаи являются, как мы покажем, ее следствиями.

Глава III,

в которой говорится о различных случаях первой теоремы

Мы уже говорили, что в первой теореме сопряжение двух членов составного отношения является сопряжением 1-го рода, т. е. две линии, представляющие собой эти два члена, находятся на одной стороне фигуры. Эти две линии будут иметь, следовательно, одну общую точку из трех точек стороны, на которой они находятся. Если эта общая точка—одна из крайних точек стороны, то линии, представляющие собой два члена отношения, будут налагаться друг на друга; в этом случае будем называть отношение неявным; в противном случае одна из двух линий, представляющих собой два члена отношения, находится на продолжении другой, в этом случае будем называть отношение явным; одна из двух других точек стороны принадлежит предшествующему, а другая—последующему члену; эти точки являются граничными точками и для двух других членов, хотя они не являются общими точками этих отрезков.

Если, например, мы рассмотрим в предыдущем построении отношение $\frac{BE}{EA}$, то точка E будет общей для двух членов; B будет точкой, принадлежащей предшествующему члену, A—точкой, принадлежащей последующему члену, и отношение является явным.

Напротив, в отношении $\frac{BA}{AE}$, являющемся неявным, A—общая точка, B—точка, принадлежащая предшествующему члену, E — точка, принадлежащая последующему члену, и т. д.

Сторона, на которой расположены два члена составного отношения, называется стороной составного отношения; та сторона, которая ее разделяет в общей точке на два члена—неучаствующая сторона; сторона, оканчивающаяся в точке, принадлежащей предшествующему члену, является стороной 1-го отношения, а сторона, оканчивающаяся в точке, принадлежащей последующему члену, является стороной 2-го отношения.

Неучаствующая сторона содержит три точки; оставшиеся три точки определяют неучаствующий треугольник. Таким образом неучаствующая сторона и неучаствующий треугольник содержат шесть линий, не участвующих в этом рассмотрении, в то время как другие шесть линий представляют собой члены трех отношений. Две из этих последних линий, расположенные на стороне составного отношения, являются предшествующим и последующим членами составного отношения; две других, являющиеся предшествующим и последующим членами 1-го отношения, расположены на стороне этого отношения; здесь предшествующий член предстставляет собой линию, примыкающую к предшествующему члену составного отношения в углу неучаствующего треугольника; последующий же член налагается на предшествующий член этого отношения и примыкает к неучаствующей стороне[1]. Наконец, две остальные линии расположены на стороне 2-го отношения; здесь последующий член представляет собой сторону, примыкающую к стороне, являющейся последующим членом составного отношения в одном из углов неучаствующего треугольника, а предшествующий член расположен между последующим членом 1-го отношения и неучаствующей стороной.

Эти шесть линий, представляющих собой шесть членов составного отношения, содержат шесть точек, три точки неучаствующей стороны и три точки неучаствующего треугольника и таким образом каждая из этих точек расположена между углом неучаствующего треугольника и неучаствующей стороной.

Угол, в котором начинаются предшествующие члены составного и 1-го отношений, будем называть углом предшествующего члена или первым углом; угол, в котором оканчиваются последующие члены составного и второго отношений, будем называть углом последующего члена или вторым углом; 3-й угол, в котором оканчивается последующий член первого отношения и начинается предшествующий член 2-го отношения, будем называть общим углом.

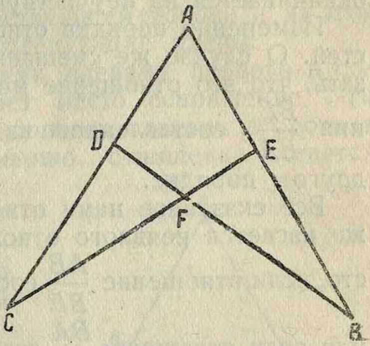
Отсюда следует, что все предшествующие члены трех отношений оканчиваются на неучаствующей стороне и на этой же стороне начинаются все три последующих члена.

Когда отношение представляется в только что указанной форме, мы имеем регулярный случай первой теоремы. Если

---

[1] В подлиннике вместо последних двух слов этой фразы повторен конец предшествующей фразы.

мы поменяем между собой местами первое и второе отношения, то будем называть полученное отношение обратным. Если же мы примем за первое отношение—отношение, имеющее предшествующим членом предшествующий член второго отношения, и последующим членом последующий член первого отношения, эти два члена находятся в сопряжении 2-го рода, а если мы примем за второе отношение—отношение, образованное предшествующим членом первого отношения и последующим членом второго отношения—эти два члена находятся в сопряжении 3-го рода.



То же самое будет иметь место в противоположном случае, когда первое отношение, сохраняя свой предшествующий член, получает в качестве последующего члена последующий член второго отношения, а это последнее, сохраняя свой предшествующий член, получает в качестве последующего члена последующий член первого отношения.

Рассмотрим, например, сторону AB. Отношение $\frac{BE}{EA}$ составлено из отношения $\frac{BF}{FD}$ и отношения $\frac{DC}{CA}$. Сторона AB является стороной составного отношения, E—общая точка, B—точка, принадлежащая предшествующему члену, A—точка, принадлежащая последующему члену, EC—сторона, разделяющая AB в точке E—неучаствующая сторона, на которой расположены точки C, F, E; три другие точки A, B, D образуют неучаствующий треугольник ABD.

Шесть линий AB, BD, AD, CE, EF, FC не участвуют в отношениях, а шесть других линий представляют собой шесть членов этих отношений.

Сторона BD, проходящая через точку B, принадлежащую предшествующему члену, является стороной первого отношения, оба члена которого расположены на этой стороне.

Сторона AC, проходящая через точку A, принадлежащую последующему члену, является стороной второго отношения, два члена которого расположены на этой стороне. BE и BF—предшествующие члены составного и первого отношений соединяют [точку B—вершину 1-го угла неучаствующего треугольника с][1] точками E, F неучаствующей стороны. [EA и CA, последующие члены составного и второго отношений, начинаются в точках E и C неучаствующей стороны][2] и оканчиваются в точке A, вершине 2-го угла неучаствующего треугольника. FD—последующий член первого отношения—начинается на неучаствующей стороне и оканчивается в общем углу неучаствующего треугольника. DC, предшествующий член второго отношения, наоборот, начинается в углу D неучаствующего треугольника и оканчивается на неучаствующей стороне.

Изменение порядка отношения не представляет трудностей. О случае же смешанного отношения достаточно сказать, что это отношение можно представить в виде отношения $\frac{BE}{EA}$, составленного из отношений $\frac{DC}{DF}$ и $\frac{BF}{AC}$ в том или другом порядке.

Все сказанное нами относится к явному отношению. Что же касается неявного отношения, то этот случай имеет место, если отношение $\frac{AB}{BE}$ составлено из отношений $\frac{AD}{DC}$ и $\frac{CF}{FE}$, или если отношение $\frac{BA}{AE}$ составлено из отношений $\frac{BD}{DF}$ и $\frac{FC}{CE}$.

К этому случаю читатель при некотором размышлении может применить все сказанное нами выше.

Глава IV,

в которой говорится о различных случаях теоремы второго рода

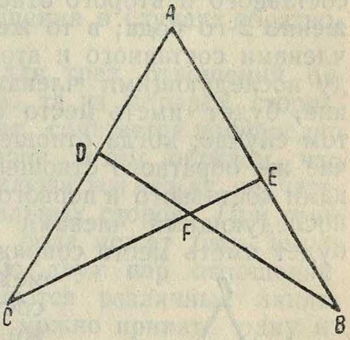
Мы уже говорили, что во второй теореме рассматривается сопряжение 2-го рода, в котором предшествующий и последующий члены каждого отношения, входящего в составное отношение, являются сторонами углов треугольников; сторона, противолежащая тому углу треугольника, в котором начинается предшествующий и последующий члены составного отношения, принадлежит неучаствующей стороне, а три остальные точки определяют неучаствующий треугольник подобно тому, как это имело место в предыдущей главе. При этом эти точки являются вершинами трех углов ABD, AEC, DFC, лежащих против трех линий, расположенных на неучаствующей стороне. Таким образом, определяются три треугольника, из которых первый является треугольником составного отношения; второй— треугольником

[1], [2] Слова в скобках пропущены в арабском тексте и добавлены редакцией перевода.

первого отношения, а третий—треугольником второго отношения. Первый угол, в котором оканчивается предшествующий член составного отношения и начинается его последующий член, является общим углом; второй угол, в котором оканчивается предшествующий член первого отношения и начинается его последующий член, является первым углом или углом предшествующего члена; третий угол, в котором оканчивается предшествующий член второго отношения и начинается его последующий член, является 2-м углом или углом последующего члена. Все три предшествующих члена начинаются на неучаствующей стороне и на этой же стороне оканчиваются все последующие члены.

Здесь между предшествующими членами первого и составного отношений всегда имеет место сопряжение 1-го рода, так же как между последующими членами второго и составного отношений, пока, конечно, отношение остается регулярным.

В случае же обратного и смешанного отношения, когда первое отношение будет образовано тем же самым предшествующим членом, что и прежде, и последующим членом второго отношения, то сопряжение между этими членами будет сопряжением 3-го рода, в то время как сопряжение между двумя членами второго отношения будет в этом случае сопряжением 1-го рода.



Если в случае прежней фигуры отношение $\frac{AB}{BD}$ будет составлено из отношений $\frac{AE}{EC}$ и $\frac{CE}{FD}$, мы будем иметь неучаствующую сторону AC и неучаствующий треугольник BEF; к линиям этой фигуры можно применить все сказанное нами выше, вследствие чего мы не будем здесь заниматься повторением.

Глава V,

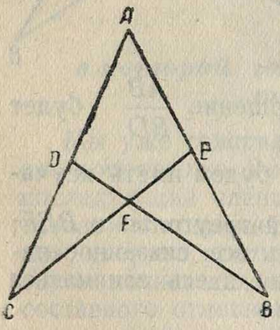
в которой говорится о различных случаях теоремы третьего рода

В этой теореме рассматривается сопряжение 3-го рода, т. е. тот случай, когда предшествующие и последующие члены составного отношения, так же как и двух составляющих отношений, образованы линиями, заключенными между двумя сторонами фигуры.

Здесь каждую из этих сторон можно рассматривать как неучаствующую сторону; неучаствующий треугольник будет поэтому образован остальными тремя точками и шесть других линий будут являться членами трех отношений. Из трех углов неучаствующего треугольника общим углом будет тот угол, в котором начинаются последующий член первого отношения и предшествующий член второго отношения, углом предшествующего члена или первым углом будет тот угол, в котором начинаются члены составного и первого отношений, и угол последующего члена будет тот угол, в котором начинаются последующие члены составного и второго отношений.

Все шесть линий оканчиваются на неучаствующей стороне.

Между предшествующими членами составного и первого отношений, так же как и между последующими членами составного и второго отношений, будет иметь место сопряжение 2-го рода; в то же время между предшествующими членами составного и второго отношений, так же как и между последующими членами составного и первого отношений, будет иметь место сопряжение 1-го рода,—все это в том случае, когда отношение является регулярным, в случае же обратного отношения между предшествующими членами составного и первого отношений, так же как и между последующими членами составного и второго отношений будет иметь место сопряжение 1-го рода, в то время как между предшествующими членами составного и второго отношений, так же и между последующими членами составного и первого отношения, будет иметь место сопряжение 2-го рода.



Наконец, если отношение является смешанным, сопряжение между двумя членами первого отношения будет сопряжением 1-го рода, а сопряжение между двумя членами второго отношения будет сопряжением 2-го рода.

Рассмотрим на приведенной выше фигуре отношение $\frac{BA}{FC}$, два члена которого являются линиями, заключенными между сторонами AC, BD. Если мы хотим рассматривать как неучаствующую сторону прямую AC, то неучаствующим треугольником будет треугольник EFB. B будет углом предшествующего члена, F—углом последующего члена, E—общим углом и отношение $\frac{BA}{FC}$ состоит из отношения $\frac{BD}{EC}$

линий, заключенных между сторонами AB, AC, и отношения $\frac{EA}{FD}$ линий, заключенных между сторонами CA, CE.

Если мы примем за неучаствующую сторону прямую BD, тогда неучаствующим треугольником будет треугольник AEC, A будет углом предшествующего члена, C—углом последующего члена, E—общим углом и отношение $\frac{AB}{CF}$, два члена которого заключены между двумя упомянутыми выше сторонами, будет составлено из отношения $\frac{AD}{EF}$ двух линий, заключенных между сторонами AB, BD, и отношения $\frac{EB}{CD}$ двух линий, заключенных между сторонами BD, EC. На основании сказанного нами читатель сможет сам составить аналогичные соотношения в случаях обратного и смешанного отношений.

Из предыдущего следует, что для трех отношений, определяющих составное отношение, та из четырех сторон, которая не участвует в отношениях, сочетается поочередно с каждой из трех остальных сторон таким образом, что каждый член отношения будет заключаться между неучаствующей стороной и одной из остальных сторон. При этом всякое составное отношение этого рода может быть выражено двояким образом: с помощью двух пар отношений, членами каждого из которых являются различные линии; здесь за неучаствующую сторону можно принять одну из двух сторон, так как ничто не обязывает предпочитать одну другой. Именно поэтому мы сказали, что, хотя в сопряжении 3-го рода линия обладает только одним сопряженным с ним отрезком, это единственное сопряжение равносильно двойному сопряжению, так же как в случае сопряжения первого или второго рода.

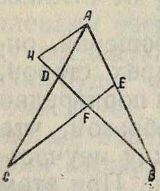
Глава VI,

в которой содержится введение к доказательству всех этих трех теорем

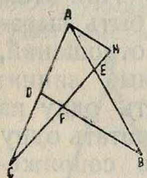
Для этого доказательства нужно провести линию, параллельную одной из известных линий, через точку пересечения двух сторон таким образом, чтобы образовать четыре попарно подобных треугольника. Так как эта линия проходит через точку пересечения двух из четырех сторон и не может быть им параллельной, ни налагаться на одну из них, то эта линия должна быть параллельна одной из двух других сторон и секущей по отношению к другой. Эта параллельная линия всегда выходит из одного из углов неучаствующего треугольника; поэтому она обязательно параллельна неучаствующей стороне и является секущей по отношению к четвертой стороне, или наоборот. Таким образом, параллельная линия может представляться в каждом из трех предложений шестью различными способами; т. е. в числе, равном удвоенному числу углов всех возможных неучаствующих треугольников; поэтому, чтобы дать доказательство для каждого случая, следует дать шесть доказательств.

Так как, с другой стороны, всего имеется шесть точек и из каждой точки можно провести только две линии, такая параллельная линия может быть проведена двенадцатью способами, как это показано в следующей таблице:

1-я пара (параллельная линия проведена из точки A)

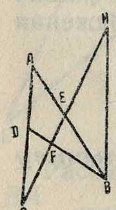


Треугольник BAH подобен треугольнику BEF
„ AHD „ „ DFC

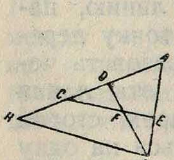


„ AHE подобен треугольнику EFB
„ CHA „ „ CDF

2-я пара (параллельная линия проведена из точки B)

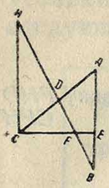


Треугольник BHE подобен треугольнику EAC
„ BHF „ „ FDC

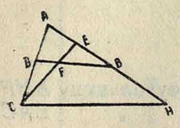


„ ABH подобен треугольнику AEC
„ DBH „ „ DFC

3-пара (параллельная линия проведена из точки C).

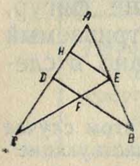


Треугольник BAD подобен треугольнику DHC
» BEF » » FHC

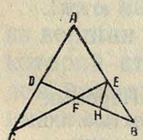


» AHC подобен треугольнику ABD
» EHC » » EBF

4-я пара (параллельная линия проведена из точки E)

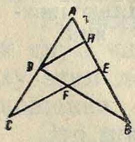


Треугольник ABD подобен треугольнику AEH
» CEH » » CFD

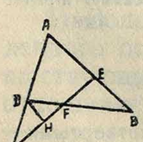


» BAD подобен треугольнику BEH
» EHF » » EDC

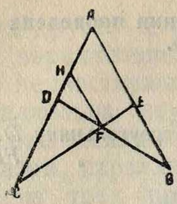
5-я пара (параллельная линия проведена из точки D)



Треугольник AEC подобен треугольнику AHD
» BHD » » BEF

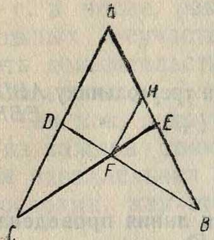


» FHD подобен треугольнику BEF
» CAF » » CDH



6-я пара (параллельная линия проведена из точки F)

Треугольник BAD подобен треугольнику FHD
" CAE " " CFH



" BAD подобен треугольнику BHF
" EHF " " EAC

При этом каждый из четырех треугольников соответствует тем шести из двенадцати приведенных выше фигур, которые применялись в той теореме, где рассматриваемый треугольник являлся неучаствующим. Это указано в следующей таблице:

Неучаствующий треугольник	Пары подобных треугольников, соответствующих этому неучаствующему треугольнику согласно предыдущей таблице	В этом случае участвующие линии называются
ABD	1-я пара (параллельная линия проведена из точки A)	Первыми шестью линиями
	2-я " (" " " из точки B)	
	5-я " (" " " из точки D)	
ACE	1-я " (" " " из точки A)	Вторыми шестью линиями
	3-я " (" " " из точки C)	
	4-я " (" " " из точки E)	
BEF	2-я " (" " " из точки B)	Третьими шестью линиями
	4-я " (" " " из точки E)	
	6-я " (" " " из точки F)	
CDF	3-я " (" " " из точки C)	Четвертыми шестью линиями
	5-я " (" " " из точки D)	
	5-я " (" " " из точки F)	

Отсюда видно, что каждая пара соответствует двум треугольникам, причем соответствие может быть представлено следующим образом:

Неучаствующий треугольник *ABD*	1-я пара	Неучаствующий треугольник *ACE*
2-я пара	Пятая пара Четвертая пара	3-я пара
Неучаствующий треугольник *BEF*	6-я пара	Неучаствующий треугольник *CDF*

Так как параллельная линия, проведенная из одной из вершин неучаствующего треугольника, оканчивается на некоторой стороне, мы получим пересечение, которое будем называть вторичным пересечением. Если это пересечение имеет место на неучаствующей стороне, то мы будем называть эту параллельную линию дополнением отношения. [Если же пересечение имеет место на четвертой стороне, то будем называть дополнением отношения линию на этой 4-й стороне между неучаствующей стороной и параллельной прямой][1].

Во всех доказательствах это дополнение присоединяется к двум членам одного отношения таким образом, что между этим дополнением и двумя членами образуются два отношения.

Это присоединение может произойти тремя различными способами:

1) Дополнение может находиться перед двумя членами данного отношения, так что между дополнением и предшествующим членом отношения образуется отношение; это отношение вместе с данным отношением дает два отноше-

[1] Это предложение, пропущенное в подлиннике, добавлено редакцией перевода, так как в последующих трех главах термин „дополнение отношения“ в указанном случае понимается именно в этом смысле.

ния; в этом случае говорят что дополнение отношения предшествует его членам.

2) Дополнение может находиться между предшествующим и последующим членами данного отношения, так что образуется отношение между предшествующим членом и дополнением и между последующим членом и дополнением; таким образом мы снова получаем два отношения; в этом случае дополнение называется промежуточным.

3) Дополнение может находиться после членов данного отношения, так что к данному отношению присоединяется отношение между последующим членом этого отношения и дополнением; таким образом мы также, получаем два отношения; в этом случае дополнение отношения называют последующим за его членами.

Все сказанное нами будет весьма полезно при доказательствах указанных предложений.

Глава VII,

в которой говорится о способе доказательств в случае первой теоремы

Рассмотрим случай регулярного отношения.

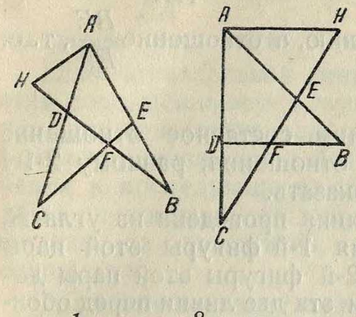
Если параллельная линия проведена из 1-го угла, мы поместим дополнение перед двумя членами 2-го отношения таким образом, чтобы между этим дополнением и предшествующим членом этого отношения получить отношение, равное 1-му отношению, а между этим дополнением и последующим членом 2-го отношения—отношение, равное составному отношению.

Этим доказательство исчерпывается.

Если параллельная линия проведена из 2-го угла, мы поместим дополнение после двух членов 1-го отношения таким образом, чтобы получить между последующим членом этого отношения и дополнением отношение, равное 2-му отношению, а между предыдущим членом 1-го отношения и дополнением—отношение, равное составному отношению.

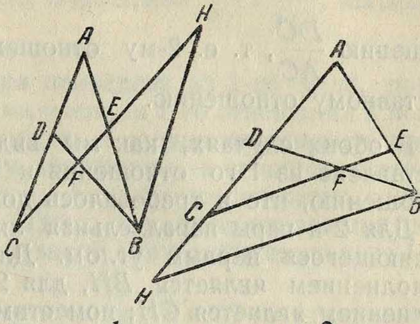
Если параллельная линия проведена из общего угла, мы поместим дополнение между двумя членами составного отношения таким образом, чтобы получить между последующим членом этого отношения и дополнением отношение, равное 1-му отношению, а между дополнением и последующим членом составного отношения—отношение, равное 2-му отношению.

Например, пусть требуется доказать, что отношение $\frac{BE}{EA}$ составлено из отношений $\frac{BF}{FD}$ и $\frac{DC}{CA}$. Это отношение известно под названием явного отношения Птолемея[1]. Треугольник ADB является неучаствующим треугольником, вследствие чего здесь мы имеем случай первых шести линий, как указано ниже:



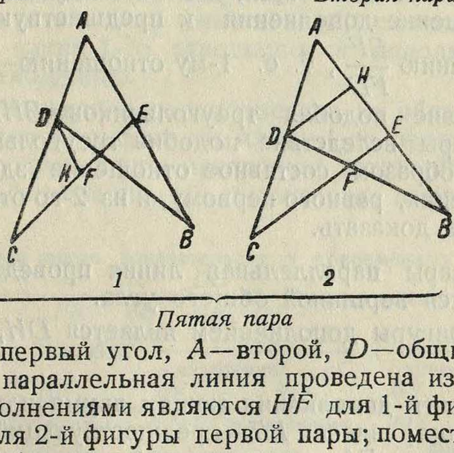
1 2

Первая пара



1 2

Вторая пара



1 2

Пятая пара

Здесь B—первый угол, A—второй, D—общий угол. Для первой пары параллельная линия проведена из A.

Здесь дополнениями являются HF для 1-й фигуры первой пары и AH для 2-й фигуры первой пары; поместим их после обоих членов 1-го отношения.

Здесь BF—предшествующий член, FD—последующий член, HF—дополнение, так что вследствие подобия треугольников DFC и DAH мы получаем, что отношение $\frac{FD}{HF}$ равно отношению $\frac{DC}{CA}$, т. е. 2-му отношению, а вследствие подобия треугольников BFE и BAH мы получаем, что отношение $\frac{BF}{FH}$, составленное из отношений $\frac{BF}{FD}$ и $\frac{FD}{FH}$,

[1] Птолемей (Ptolmaies) Клавдий—знаменитый древнегреческий астроном и математик, живший в Александрии в 1-ой половине II века н. э. В подлиннике указана арабская транскрипция имени Птолемея بطلميوس (Битлимиус).

равно отношению $\frac{BE}{EA}$, то есть составному отношению.

Точно также для 2-й фигуры отношение $\frac{FD}{AH}$ равно отношению $\frac{DC}{AC}$, т. е. 2-му отношению, а отношение $\frac{BE}{EA}$, т. е. составному отношению.

В обоих случаях, как мы видим, составное отношение составлено из 1-го отношения и отношения, равному 2-му отношению, что и требовалось доказать.

Для 2-й пары параллельная линия проведена из угла B, являющегося первым углом. Для 1-й фигуры этой пары дополнением является BH, для 2-й фигуры этой пары дополнением является CH; поместим эти две линии перед обоими членами 2-го отношения. Здесь BH, HC—дополнение, DC—предшествующий член, AC—последующий член, поэтому отношение дополнения к предшествующему члену равно отношению $\frac{BF}{FD}$, т. е. 1-му отношению—для 1-й фигуры вследствие подобия треугольников BHF и FCD, а для 2-й фигуры вследствие подобия треугольников ABH и AEC. Таким образом, составное отношение здесь составлено из отношения, равного первому, и из 2-го отношения, что и требовалось доказать.

Для 5-й пары параллельная линия проведена из точки D, являющейся вершиной общего угла.

Для 1-й фигуры дополнением является DH, для 2-й фигуры—EH.

Поместим эти дополнения между двумя членами составного отношения; здесь BE—предшествующий член DH, HE—дополнения, EA—последующий член и поэтому отношение предшествующего члена к дополнению равно 1-му отношению—для 1-й фигуры вследствие подобия треугольников BEF и FHD, а для 2-й фигуры вследствие подобия треугольников BEF и BDH.

Отношение дополнения к последующему члену равно 2-му отношению—для 1-й фигуры вследствие подобия треугольников CHD и CEA, для 2-й фигуры вследствие подобия треугольников AEC и AHD.

Таким образом, здесь составное отношение оказалось составленным из двух отношений, равных 1-му и 2-му отношениям, что и требовалось доказать.

Мы привели шесть доказательств регулярного отношения[1].

Если требуется доказать предложение 1-го рода в смешанном случае, например, если требуется доказать, что отношение $\frac{BE}{EA}$ составлено из отношений $\frac{BF}{AC}$ и $\frac{CD}{FD}$, мы должны рассмотреть снова три случая:

Если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим дополнение перед двумя членами 1-го отношения и получим, что отношение дополнения к предшествующему члену 1-го отношения равно 2-му отношению, а отношение дополнения к последующему члену 1-го отношения равно составному отношению, так что здесь составное отношение составлено из отношения, равного 2-му отношению и из 1-го отношения.

Если параллельная линия проведена из 2-го угла, поместим дополнение после двух членов 1-го отношения и получим, что отношение последующего члена 1-го отношения к дополнению равно 2-му отношению[2], а отношение предшествующего члена 1-го отношения к дополнению равно составному отношению.

Если параллельная линия проведена из общего угла, то поместим последовательно два члена 1-го отношения между двумя членами составного отношения таким образом, чтобы получить три отношения, а дополнение поместим между

---

[1] Приведем эти шесть доказательств в современных обозначениях. Требуется доказать $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FD}\times\frac{DC}{CA}$. 1) Первая пара. Дополнения HF и AH. В силу подобий $\frac{FD}{\text{дополнение}}=\frac{DC}{AC}$ и $\frac{BF}{\text{дополнение}}=\frac{BE}{EA}$. Поэтому $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{\text{дополнение}}=\frac{BF}{FD}\times\frac{FD}{\text{дополнение}}=\frac{BF}{FD}\times\frac{DC}{AC}$. 2) Вторая пара. Дополнения BH и CH. В силу подобий $\frac{\text{дополнение}}{DC}=\frac{BF}{FD}$ и $\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{BE}{EA}$. Поэтому $\frac{BE}{EA}=\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{\text{дополнение}}{CD}\times\frac{CD}{AC}=\frac{BF}{FD}\times\frac{CD}{AC}$. 3) Пятая пара. Дополнения DH и EH. В силу подобий $\frac{BE}{\text{дополнение}}=\frac{BF}{DF}$ и $\frac{\text{дополнение}}{EA}=\frac{DC}{CA}$. Поэтому $\frac{BE}{EA}=\frac{BE}{\text{дополнение}}\times\frac{\text{дополнение}}{EA}=\frac{BF}{DF}\times\frac{DC}{CA}$. Заметим, что дополнения AH, CH и EH во вторых фигурах всех рассматриваемых пар являются линиями на 4-й стороне между неучаствующей стороной и параллельной линией.

[2] В подлиннике ошибочно написано: „1-му отношению".

двумя членами 2-го отношения так, чтобы получить два отношения. Тогда первое из этих двух отношений будет равно последнему из трех, в то время как второе из этих двух отношений будет равно первому из трех, а первое отношение является оставшимся из трех. Этим доказательство исчерпывается.

Например, для 2-й фигуры 5-й пары дополнение—EH. Если мы поместим его между членами 2-го отношения, то получим: CD—предшествующий член; EH—дополнение; FD—последующий член 2-го отношения; AC—последующий член 1-го отношения; EA—последующий член составного отношения; тогда $\frac{BE}{BF}=\frac{EH}{FD}$ из подобных треугольников BEF и BHD, $\frac{AC}{EA}=\frac{CD}{EH}$ из подобных треугольников AHD и AEC.

Таким образом составное отношение будет составлено из трех отношений, из которых два составляют одно 2-е отношение, в то время как 3-е будет равно одному первому, что и требовалось доказать.

Аналогичным образом можно рассмотреть все остальные случаи[1].

Если отношение является обратным, т. е. если 1-е и 2-е отношение поменены местами, следует соответственно изменить все сказанное нами о регулярном отношении, т. е. если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим дополнение перед двумя членами 1-го отношения, если па-

---

[1] Приведем все эти шесть доказательств в современных обозначениях. Требуется доказать $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{AC}\times\frac{CD}{FD}$. 1) Первая пара. Дополнения HF и AH. В силу подобий $\frac{BF}{\text{дополнение}}=\frac{BE}{EA}$ и $\frac{AC}{\text{дополнение}}=\frac{DC}{FD}$. Поэтому $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{\text{дополнение}}=\frac{BF}{AC}\times\frac{AC}{\text{дополнение}}=\frac{BF}{AC}\times\frac{DC}{FD}$. 2) Вторая пара. Дополнения BH и CH. В силу подобий $\frac{\text{дополнение}}{BF}=\frac{DC}{FD}$ и $\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{BE}{EA}$. Поэтому $\frac{BE}{EA}=\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{\text{дополнение}}{BF}\times\frac{BF}{AC}=\frac{BF}{AC}\times\frac{CD}{FD}$. 3) Пятая пара. Дополнение DH и EH. В силу подобий $\frac{BE}{BF}=\frac{\text{дополнение}}{FD}$ и $\frac{AC}{EA}=\frac{CD}{\text{дополнение}}$. Поэтому $\frac{BE}{EA}=\frac{BE}{BF}\times\frac{BF}{AC}\times\frac{AC}{EA}=\frac{\text{дополнение}}{FD}\times\frac{BF}{AC}\frac{CD}{\text{дополнение}}=\frac{BF}{AC}\times\frac{CD}{FD}$.

раллельная линия проведена из 2-го угла, поместим дополнение после двух членов 2-го отношения, если параллельная линия проведена из общего угла, поместим дополнение между двумя членами составного отношения.

Наконец, в том случае, когда отношение является одновременно и смешанным и обратным, если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим дополнение перед двумя членами 2-го отношения; если параллельная линия проведена из 2-го угла, поместим дополнение после двух членов 1-го отношения; если параллельная линия проведена из общего угла, поместим дополнение между двумя членами 1-го отношения, а два члена 2-го отношения—между двумя членами составного отношения; здесь следует сказать о 1-м отношении все то, что относилось ко второму и наоборот.

Представляю читателю привести примеры самому.

Глава VIII,

в которой говорится о способе доказательства в случае второй теоремы

В регулярном случае 2-й теоремы, если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим дополнение после двух членов 1-го отношения; если параллельная линия проведена из 2-го угла, поместим дополнение перед двумя членами 2-го отношения; если параллельная линия проведена из общего угла, поместим дополнение между двумя членами составного отношения и проведем доказательство аналогично тому, как было указано выше.

В смешанном случае 2-го предложения: если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим дополнение после двух членов 1-го отношения; если параллельная линия проведена из 2-го угла, поместим дополнение перед двумя членами 1-го отношения;[1] если параллельная линия проведена из общего угла, поместим дополнение между двумя членами 2-го отношения, а также два члена 1-го отношения—между двумя членами составного отношения; в этом случае первое и второе из этих трех отношений будут соответственно равны второму и первому из двух других отношений по правилу перемешанной пропорции.

Случаи обратного и смешанного обратного отношений снова приводят к рассмотренным случаям.

---

[1] В подлиннике ошибочно написано: „2-го отношения".

Мы не будем останавливаться на приведении примеров[1].

Глава IX,

в которой говорится о способе доказательства в случае третьей теоремы

В регулярном случае 3-й теоремы, если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим два члена 2-го отношения между двумя членами составного отношения, а

---

[1] Приведем пример всех шести доказательств второго предложения в регулярном и смешанном случаях (в современных обозначениях).

Регулярный случай. Требуется доказать $\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{EC}\times\frac{CF}{FD}$.

1) Четвертая пара. Дополнения EH и DH. В силу подобий $\frac{AE}{\text{дополнение}}=\frac{AB}{BD}$ и $\frac{EC}{\text{дополнение}}=\frac{CF}{FD}$. Поэтому $\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{\text{дополнение}}=\frac{AE}{EC}\times\frac{EC}{\text{дополнение}}=\frac{AE}{EC}\times\frac{CF}{FD}$. 2) Шестая пара. Дополнения FH и AH. В силу подобий $\frac{\text{дополнение}}{CF}=\frac{AE}{CE}$ и $\frac{\text{дополнение}}{FD}=\frac{AB}{BD}$. Поэтому $\frac{AB}{BD}=\frac{\text{дополнение}}{FD}=\frac{\text{дополнение}}{CF}\times\frac{CF}{FD}=\frac{AB}{BD}\times\frac{CF}{FD}$. 3) Вторая пара. Дополнения BH и CH. В силу подобий $\frac{AB}{\text{дополнение}}=\frac{AE}{EC}$, $\frac{\text{дополнение}}{BD}=\frac{CF}{FD}$. Поэтому $\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{\text{дополнение}}\times\frac{\text{дополнение}}{BD}=\frac{AE}{EC}\times\frac{CF}{FD}$.

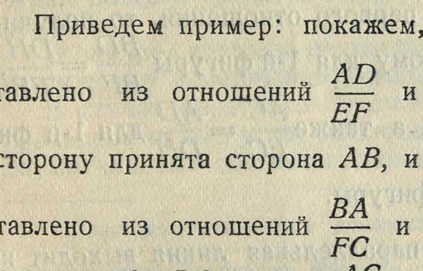
Смешанный случай. Требуется доказать $\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{FD}\times\frac{CF}{EC}$.

1) Четвертая пара. Дополнения EH и DH. В силу подобий $\frac{AE}{\text{дополнение}}=\frac{AB}{BD}$ и $\frac{FD}{\text{дополнение}}=\frac{CF}{EC}$. Поэтому $\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{\text{дополнение}}=\frac{AE}{FD}\times\frac{FD}{\text{дополнение}}=\frac{AE}{FD}\times\frac{CF}{EC}$. 2) Шестая пара. Дополнения FH и AH. В силу подобий $\frac{\text{дополнение}}{AE}=\frac{CF}{CE}$ и $\frac{\text{дополнение}}{FD}=\frac{AB}{BD}$. Поэтому $\frac{AB}{BD}=\frac{\text{дополнение}}{FD}=\frac{\text{дополнение}}{AE}\times\frac{AE}{FD}=\frac{AE}{FD}\times\frac{CF}{CE}$. 3) Вторая пара. Дополнения BH и CH. В силу подобий $\frac{CF}{\text{дополнение}}=\frac{DF}{BD}$, $\frac{\text{дополнение}}{EC}=\frac{AB}{AE}$. Поэтому $\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{AE}\times\frac{AE}{FD}\times\frac{DF}{BD}=\frac{\text{дополнение}}{EC}\times\frac{AE}{FD}\times\frac{CF}{\text{дополнение}}=\frac{AE}{FD}\times\frac{CF}{EC}$.

дополнение—между двумя членами 1-го отношения; тогда первое и второе из этих двух последних отношений будут соответственно равны последнему и первому из трех других по правилу перемешанной пропорции. Если параллельная линия проведена из 2-го угла, поступим обратным образом, помещая два члена первого отношения между двумя членами составного отношения, а дополнение—между двумя членами 2-го отношения; тогда получим равенство этих двух отношений двум из трех первых по правилу перемешанной пропорции. Если параллельная линия проведена из общего угла, можно поступить двояким образом: 1) помещая два члена 1-го отношения между двумя членами составного отношения, а дополнение—между двумя членами 2-го отношения, 2) помещая два члена 2-го отношения между двумя членами составного, а дополнение—между двумя членами 1-го отношения. В обоих случаях первое и последнее из трех отношений равны первому и последнему из двух отношений.

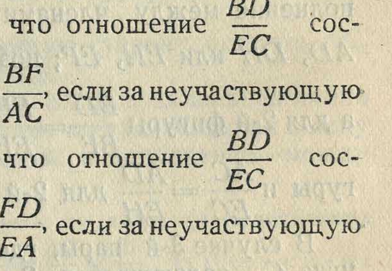
Приведем пример: покажем, что отношение $\frac{BD}{EC}$ составлено из отношений $\frac{AD}{EF}$ и $\frac{BF}{AC}$, если за неучаствующую сторону принята сторона AB, и что отношение $\frac{BD}{EC}$ составлено из отношений $\frac{BA}{FC}$ и $\frac{FD}{EA}$, если за неучаствующую сторону принята сторона AC.

Доказательство. Принимая сторону AB за неучаствующую сторону, получим неучаствующий треугольник DFC. D будет 1-м углом; C—2-м; F—общим углом, и применяя четвертые шесть отрезков, получим следующие фигуры:



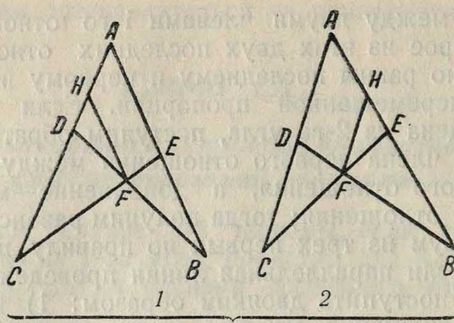
1 2

Третья пара



1 2

Пятая пара



Шестая пара

В случае 5-й пары, где параллельная линия выходит из угла D, являющегося первым углом, если мы поместим два члена 2-го отношения между членами составного отношения, то получим BD, BF, AC, EC, а если мы поместим дополнение между членами первого отношения, то получим AD, DH или EH, EF; поэтому для 1-й фигуры $\frac{BD}{BF}=\frac{DH}{EF}$, а для 2-й фигуры $\frac{BD}{BF}=\frac{EH}{EF}$, а также $\frac{AC}{EC}=\frac{AD}{DH}$ для 1-й фигуры и $\frac{AC}{EC}=\frac{AD}{EH}$ для 2-й фигуры.

В случае 3-й пары, где параллельная линия выходит из угла C, являющегося 2-м углом, если мы поместим два члена 1-го отношения между членами составного отношения, то получим BD, AD, EF, EC, а если мы поместим дополнение между двумя членами 2-го отношения, то получим BF, BH или CH, AC, поэтому $\frac{BF}{BH}=\frac{EF}{EC}$ для 1-й фигуры, $\frac{BF}{CH}=\frac{EF}{EC}$ для 2-й фигуры, а также $\frac{BH}{AC}=\frac{BD}{AD}$ для 1-й фигуры и $\frac{CH}{AC}=\frac{BD}{AD}$ для 2-й фигуры.

В случае 6-й пары, где параллельная линия выходит из общего угла F, если мы поместим два члена 1-го отношения между двумя членами составного отношения, то получим BD, AD, EF, EC, а если мы поместим дополнение между двумя членами 2-го отношения, то получим BF, FH или AH, AC; поэтому $\frac{BF}{AH}=\frac{BD}{AD}$ для 1-й фигуры и

$\frac{BF}{FH}=\frac{BD}{AD}$ для 2-й фигуры, а также $\frac{AH}{AC}=\frac{EF}{EC}$ для 1-й фигуры и $\frac{FH}{AC}=\frac{EF}{EC}$ для 2-й фигуры.

Если же мы поместим два члена 2-го отношения между двумя членам составного отношения, то получим BD, BF, AC, EC, а если мы поместим дополнения между двумя членами 1-го отношения, мы получим AD, FH или AH, EF, поэтому $\frac{BD}{BF}=\frac{AD}{AH}$ для 1-й фигуры и $\frac{BD}{BF}=\frac{AD}{FH}$ для 2-й фигуры, а также $\frac{AC}{EC}=\frac{AH}{EF}$ для 1-й фигуры и $\frac{AC}{EC}=\frac{FH}{FE}$ для 2-й фигуры[1].

Очевидно, что для 1-го и 2-го углов равенство отношений имеет место в силу правила перемешанной пропорции, а для общего угла—в силу правила упорядоченной пропорции.

В случае, когда за неучаствующую сторону принята AC, рассуждают совершенно аналогично.

В случае обратного отношения, если параллельная линия проведена из 1-го угла, поместим два члена отношения между двумя членами составного отношения, а дополнение—между

---

[1] Проведем эти шесть доказательств до конца (в современных обозначениях). Требуется доказать $\frac{BD}{EC}=\frac{AD}{EF}\times\frac{BF}{AC}$. 1) Пятая пара Дополнения DH и EH. В силу подобий $\frac{AD}{\text{дополнение}}=\frac{AC}{EC}$ и $\frac{\text{дополнение}}{EF}=$ $=\frac{BD}{BF}$. Поэтому $\frac{BD}{EC}=\frac{BD}{BF}\times\frac{BF}{AC}\times\frac{AC}{EC}=\frac{\text{дополнение}}{EF}\times\frac{BF}{AC}\times$ $\times\frac{AD}{\text{дополнения}}=\frac{AD}{EF}\times\frac{BF}{AC}$. 2) Третья пара. Дополнения BH и CH. В силу подобий $\frac{BF}{\text{дополнение}}=\frac{EF}{EC}$ и $\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{BD}{AD}$. Поэтому $\frac{BD}{EC}=\frac{BD}{AD}\times\frac{AD}{EF}\times\frac{EF}{EC}=\frac{\text{дополнение}}{AC}\times\frac{AD}{EF}\times\frac{BF}{\text{дополнение}}=$ $=\frac{AD}{EF}\times\frac{BF}{AC}$. 3) Шестая пара. Дополнения AH и FH. В силу подобий $\frac{BF}{\text{дополнение}}=\frac{BD}{AD}$ или $\frac{AD}{\text{дополнение}}=\frac{BD}{BF}$ и $\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{EF}{EC}$ или $\frac{\text{дополнение}}{EF}=\frac{AC}{EC}$.

двумя членами 2-го отношения; если параллельная линия проведена из 2-го или общего угла, поместим два члена 2-го отношения между двумя членами составного отношения, а дополнение—между двумя членами 1-го отношения.

В случае смешанного отношения, если параллельная линия проведена из 1-го или 2-го угла, поместим дополнение между двумя членами составного отношения и получим два отношения, равные 1-му и 2-му отношениям по правилу перемешанной пропорции, если параллельная линия проведена из 1-го угла, и по правилу упорядоченной пропорции, если параллельная линия проведена из 2-го угла. В случае, если параллельная линия проведена из общего угла, дело будет происходить совершенно так же, как и в случае регулярного отношения[1].

Наконец, если отношение является одновременно и смешанным и обратным, правило аналогично правилу предыдущего случая. При этом в случае обратного и смешанного отношений следует поменять местами правила перемешанной и упорядоченной пропорции для двух указанных углов. Мы не будем продолжать этого исследования на примерах и на этом закончим то, что мы хотели сказать о доказательствах всех трех теорем.

Глава X,

которая посвящена определению числа отношений в этой фигуре, числа теорем о них и числа доказательств этих теорем, а также выяснению причины, по которой Птолемей ограничился двумя случаями первого рода

Некоторые из людей этой науки составили таблицы, в которых они указывают для каждого доказательства или случая восемнадцать вытекающих друг из друга отношений, связанных с этим случаем. Так как это почти совершенно бесполезно, мы не будем заниматься этим вопросом. Однако мы рассмотрим вопрос о числе отношений и теорем о них.

Так как всего имеется двенадцать линий, каждая из которых образует составное отношение, составленное из

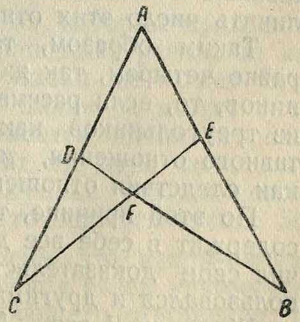
---

1 Поэтому $\frac{BD}{EC}=\frac{BD}{AD}\times\frac{AD}{EF}\times\frac{EF}{EC}=\frac{BF}{\text{дополнение}}\times\frac{AD}{EF}\times\frac{\text{дополнение}}{AC}=\frac{AD}{EF}\times\frac{BF}{AC}$ или $\frac{BD}{EC}=\frac{BD}{BF}\times\frac{BF}{AC}\times\frac{AC}{EC}=\frac{AD}{\text{дополнение}}\times\frac{BF}{AC}\times\frac{\text{дополнение}}{EF}=\frac{AD}{EF}\times\frac{BF}{AC}$.

двух других отношений с одной из пяти линий и так как одна из этих пяти линий равносильна двум линиям в том смысле, что образуемое ею отношение составленно из двух пар составных отношений, мы получаем, что число отношений линий равно 60, а число составных отношении равно 72. Простые отношения, составляющие эти составные отношения, составляют удвоенное число, т. е. 144, а общее число отношений—204. С другой стороны, число 72, представляющее собой полное число составных отношений, выражает также число систем из двух простых отношений, соответствующих каждому составному отношению, откуда следует, что число теорем о составных отношениях с учетом различия между регулярными, обратными, смешанными и смешанными обратными отношениями равно числу 72, умноженному на 4, т. е. 288.

Для каждого из этих 288 теорем имеет место 6 доказательств, т. е. всего 1728 доказательств. Если же мы распространим эти различные теоремы и различные доказательства этих теорем на 12 видов этой фигуры, которые люди этой науки обычно рассматривают, мы получим 3456 теорем и 20 736 доказательств.

Но мы можем принять во внимание 48 видов этой фигуры, получающихся при рассмотрении ее с различных сторон[1], что нам даст $288 \times 48 = 13824$ теоремы и $6 \times \times 13\,824 = 82\,944$ доказательства. Если же мы учтем, в соответствии с изложенным по поводу составных отношений, что каждое отношение этого рода заключает в себе 36 других, то получим $13\,824 \times 36 = 497664$ теоремы, относящихся к трем отношениям. Правда, в этом числе будет много повторяющихся отношений. Но можно рассматривать эти отношения как производные других отношений, не считая их все одинаково необходимыми и независимыми. Итак, вы видите, какое число отношений имеет место для одной столь малой фигуры!



Из этого большого числа отношений Птолемей ограничился изложением двух случаев 1-й теоремы: одного называемого обычно неявным отношением Птолемея, и другого, известного под названием явного отношения Птолемея.

Причина этого состоит в том, что тот, кто будет знать следствия из этих двух теорем, тем самым будет обладать доказательствами всех других случаев.

[1] См. главу I этой книги настоящего трактата.

Рассмотрим снова фигуру полного четырехсторонника. Неявный случай состоит в том, что отношение $\frac{AB}{AE}$ составлено из отношений $\frac{BD}{DF}$ и $\frac{FC}{CE}$. Здесь AC—неучаствующая сторона, BEF—неучаствующий треугольник; таким образом отношенне образовано из шести остальных линий, что дает, принимая во внимание все следствия составного отношения, 18 случаев.

Если теперь мы примем за неучаствующую сторону AB и, следовательно, за неучаствующий треугольник DFC, то мы непременно возвратимся к предыдущему случаю, если мы поменяем местами точки правой и левой стороны; таким образом, так же как выше, мы получаем 18 других отношений.

Явный случай состоит в том, что отношение $\frac{BE}{EA}$ составлено из отношений $\frac{BF}{FD}$ и $\frac{DC}{CA}$. Здесь EC—неучаствующая сторона, ADB—неучаствующий треугольник, и, так же как в вышеуказанном случае, мы получаем 18 отношений. Если же мы примем за неучаствующую сторону DB и, следовательно, за неучаствующий треугольник AEC, то мы получим фигуру, отличающуюся от предыдущей только тем, что здесь поменены местами точки правой и левой стороны; отсюда также получим 18 отношений. Поэтому всего мы получаем 72 отношения. Если учесть обратные, смешанные и смешанные обратные отношения, мы должны увеличить число этих отношений в четыре раза.

Таким образом, так как число сторон нашей фигуры равно четырем, так же как число неучаствующих треугольников, то, если рассматривать каждую из сторон и каждый из треугольников как неучаствующие, учитывая вид составного отношения, мы получим все остальные отношения, как следствия отношений Птолемея.

По этой причине, т. е. потому, что эти два отношения содержат в себе все другие отношения, Птолемей ограничил свои доказательства только двумя случаями, хотя он пользовался и другими отношениям. Так, например, в главе IX книги II его „Алмагеста“[1] он приводит отношение

---

[1] В подлиннике указано арабское название „Алмагеста“—كتاب المجسطى (Китабул - Маджисти). Общепринятое у нас название этой книги является искажением этого арабского названия; в свою очередь, это арабское название представляет собой искажение греческого названия этой книги „Megiste syntaxis“—„Великое построение“.

$\frac{FD}{BD}$, составленное из отношений $\frac{FC}{CE}$ и $\frac{EB}{AB}$, а в главе VI книги VIII „Алмагеста“ он проводит отношение $\frac{AB}{BE}$, составленное из отношений $\frac{AD}{DC}$ и $\frac{CF}{EF}$, однако без доказательств.

Это все, что мне известно по этому вопросу.

Глава XI,

в которой говорится о простых отношениях в этой фигуре

В этой фигуре имеют место простые отношения в том случае, когда, как мы показали в книге I, в составных отношениях два члена, один из которых входит в одно из составляющих отношений, а другой—в другое, оказываются равными.

Рассмотрим снова фигуру полного четырехсторонника. Как мы уже доказали, каждая из двенадцати линий этой фигуры определяет некоторое отношение с пятью другими линиями, и так как одна из этих линий равносильна двум линиям, можно сказать, что каждая линия сопряжена с шестью другим, а произведение 12×6 равно 72.

Если две из этих линий, каждая из которых принадлежит одному из составляющих отношений, равны, то мы получаем простое отношение. Но линия не может быть равна своей части, так же как часть линии не может быть равна целой линии; так как всего имеется четыре стороны фигуры, каждая из которых состоит из двух частей, мы должны исключить из нашего рассмотрения эти два невозможных случая, т. е. 16 из 72, так что остается только 56.

С другой стороны, когда мы говорим, что какой-нибудь член одного составляющего отношения равен какому-нибудь другому члену другого составляющего отношения, то мы одновременно утверждаем, что этот последний член равен первому, откуда следует, что 28 членов равны 28 другим. Таким образом, мы получаем всего 28 выражений, в которых четыре линии находятся в пропорции, что представляется в виде следующей таблицы.

<table>
<tr><th colspan="3">Равные линии</th><th colspan="4">Пропорциональные линии</th></tr>
<tr><td>1</td><td>AB</td><td>AD</td><td>BE</td><td>EF</td><td>AD</td><td>FC</td></tr>
<tr><td>2</td><td>AB</td><td>BD</td><td>AE</td><td>EC</td><td>FD</td><td>FC</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="2">AB</td><td rowspan="2">AC</td><td>AE</td><td>FD</td><td>EC</td><td>BD</td></tr>
<tr><td>4</td><td>EB</td><td>DC</td><td>EF</td><td>AD</td></tr>
<tr><td>5</td><td>AE</td><td>EB</td><td>AC</td><td>CD</td><td>FB</td><td>DF</td></tr>
<tr><td>6</td><td>AE</td><td>AC</td><td>EB</td><td>BF</td><td>DC</td><td>DF</td></tr>
<tr><td>7</td><td>AE</td><td>EC</td><td>AB</td><td>BD</td><td>FC</td><td>DF</td></tr>
<tr><td>8</td><td rowspan="2">AE</td><td rowspan="2">DF</td><td>AB</td><td>FC</td><td>DB</td><td>EC</td></tr>
<tr><td>9</td><td>EB</td><td>DC</td><td>BF</td><td>AC</td></tr>
<tr><td>10</td><td>EB</td><td>EF</td><td>BA</td><td>AD</td><td>FC</td><td>DC</td></tr>
<tr><td>11</td><td>EB</td><td>BF</td><td>EA</td><td>AC</td><td>DF</td><td>CD</td></tr>
<tr><td>12</td><td rowspan="2">EB</td><td rowspan="2">DC</td><td>BA</td><td>FC</td><td>AD</td><td>BF</td></tr>
<tr><td>13</td><td>EA</td><td>DF</td><td>AC</td><td>BF</td></tr>
<tr><td>14</td><td>AC</td><td>EC</td><td>AD</td><td>DB</td><td>EF</td><td>BF</td></tr>
<tr><td>15</td><td rowspan="2">AC</td><td rowspan="2">BF</td><td>AD</td><td>EF</td><td>BD</td><td>EC</td></tr>
<tr><td>16</td><td>DC</td><td>EB</td><td>FD</td><td>EA</td></tr>
<tr><td>17</td><td>AD</td><td>DC</td><td>AB</td><td>BE</td><td>FC</td><td>EF</td></tr>
<tr><td>18</td><td>AD</td><td>DB</td><td>AC</td><td>CE</td><td>BF</td><td>EF</td></tr>
<tr><td>19</td><td rowspan="2">AD</td><td rowspan="2">EF</td><td>AC</td><td>BF</td><td>EC</td><td>BD</td></tr>
<tr><td>20</td><td>DC</td><td>EB</td><td>FC</td><td>AB</td></tr>
<tr><td>21</td><td>AC</td><td>DF</td><td>CA</td><td>EA</td><td>BF</td><td>EB</td></tr>
<tr><td>22</td><td>DC</td><td>FC</td><td>DA</td><td>AB</td><td>EF</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>23</td><td rowspan="2">BD</td><td rowspan="2">EC</td><td>BF</td><td>AC</td><td>EF</td><td>AD</td></tr>
<tr><td>24</td><td>DF</td><td>EA</td><td>FC</td><td>BA</td></tr>
<tr><td>25</td><td>BF</td><td>FD</td><td>BE</td><td>EA</td><td>CD</td><td>CA</td></tr>
<tr><td>26</td><td>BF</td><td>EF</td><td>BD</td><td>DA</td><td>CE</td><td>CA</td></tr>
<tr><td>27</td><td>FD</td><td>AC</td><td>FB</td><td>BA</td><td>EC</td><td>EA</td></tr>
<tr><td>28</td><td>FD</td><td>FC</td><td>EB</td><td>BA</td><td>CD</td><td>AC</td></tr>
</table>

Если, далее, учесть обратные отношения для этих отношений, а также все остальные следствия из этих отношений, число этих отношений увеличится.

На этом мы заканчиваем наше рассмотрение плоских полных четырехсторонников.

КНИГА ТРЕТЬЯ

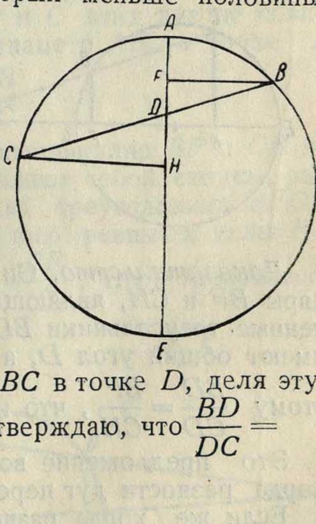
ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФИГУРЫ, НАЗЫВАЕМОЙ СФЕРИЧЕСКИМ ПОЛНЫМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКОМ И ИЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛ, ПОЛЕЗНЫХ ДЛЯ ЭТОЙ ЦЕЛИ

В этой книге содержится 3 главы

Глава I,

в которой излагается введение в теорию фигуры, называемой сферическим полным четырехсторонником

Если мы рассмотрим две дуги окружности, имеющие одну общую точку, каждая из которых меньше половины окружности, и проведем из их общей точки диаметр, этот диаметр разделит хорду, соответствующую сумме этих двух дуг, на две части.



Отношение этих частей хорды равно отношению синусов[1] *этих дуг.*

Пусть AB и AC—дуги окружности ABC, имеющие общую точку A. Линия BC является хордой, соответствующей сумме этих дуг.

Обозначим диаметр, проходящий через точку A, через AE. Этот диаметр пересекат хорду BC в точке D, деля эту хорду на части BD и DC. Я утверждаю, что $\frac{BD}{DC} =$

$$= \frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AC}.$$

---

[1] Мы переводим словом „синус" арабское слово جيب (джаиб), дословно—„впадина, залив" (что означает и латинское слово sinus; слово „джайб" является искажением индусского слова „джива", означающего „тетива"). Под словами „синус дуги" здесь понимается то, что мы обычно называем *линией синуса* угла, соответствующего этой дуге.

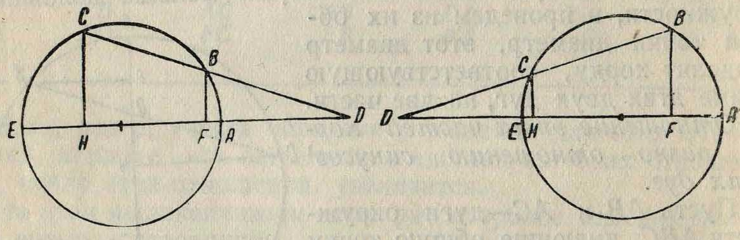
Доказательство. Опустим на диаметр AE перпендикуляры BF и CH из концов хорды BC. [Эти перпендикуляры являются синусами дуг BA и CA][1]. Полученные треугольники BDF и CDH подобны, так как углы D у них равны как вертикальные углы, а углы F и H—прямые. Поэтому $\frac{BF}{CH}=\frac{BD}{DC}$, что и требовалось доказать.

Если мы рассмотрим две неравные дуги окружности, налагающиеся друг на друга и обладающие одним общим концом, и проведем из их общего конца диаметр, то этот диаметр и продолжение хорды, соответствующей разности этих дуг, можно продолжить до их пересечения.

Отношение полученных частей равно отношению синусов дуг.

Пусть AB и AC—дуги окружности ABC, имеющие общий конец A и налагающиеся друг на друга. Разностью этих дуг является дуга BC. Продолжим хорду BC и диаметр AE до их пересечения. Я утверждаю, что $\frac{BD}{CD}=$

$$=\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}.$$



Доказательство. Опустим на диаметр AE перпендикуляры BF и CH, являющиеся синусами дуг BA и CA. Полученные треугольники BDF и CDH подобны, так как они имеют общий угол D, а углы F и H у них—прямые. Поэтому $\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CH}$, что и требовалось доказать.

Это предложение возможно только в том случае, когда хорда разности дуг пересекается с диаметром.

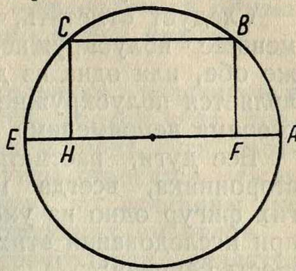
Если же хорда разности параллельна диаметру, то синусы двух дуг, т. е. перпендикуляры BF и CH, равны как параллельные, заключенные между параллельными, т. е. как противоположные стороны параллелограмма, и в силу равен-

---

[1] Предложение в скобках добавлено редакцией перевода.

ства синусов их дуг дополняют друг друга до полуокружности.

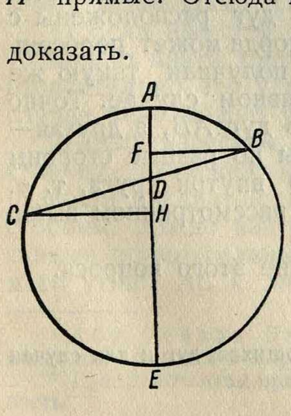
В первой теореме, когда две дуги расположены последовательно, также имеется случай, когда синусы двух дуг равны. В этом случае хорда суммы дуг равна диаметру и первый диаметр, проходящий через общий конец этих дуг, пересекается с ней в самом центре; в этом случае каждая из двух дуг также является дополнением другой до полуокружности.

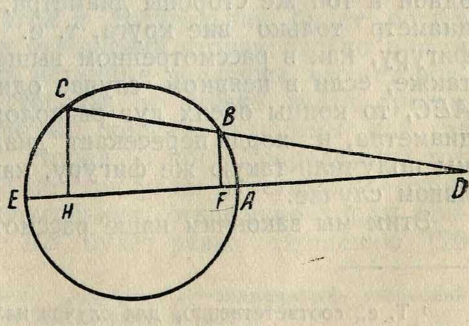


Мы поставили условием задачи неравенство двух дуг по той причине, что если бы они были равны и расположены последовательно, то их синусы совпадали бы с половинами хорды их суммы, а если бы они были равны и налагались друг на друга, то их синусы совпадали бы между собой, в силу чего в этих случаях доказательство является излишним.

Обе эти теоремы и их доказательство можно объединить следующим образом: пусть AB и AC—две неравных дуги одной и той же окружности ABC, обладающие общим концом—точкой A, причем концы B и C этих дуг не совпадают. Если хорда BC встречает диаметр AE в точке D то я утверждаю, что $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}$.

Доказательство. Опустим перпендикуляр BF и CH на диаметр AE: эти две линии представляют собой синусы, рассматриваемых дуг; полученные два треугольника BFD и DCH подобны, так так углы D у них равны, а углы F и H—прямые. Отсюда получаем $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BF}{CH}$, что и требовалось доказать.





Очевидно, что между этим двумя случаями—такая же разница, как между встречавшимися нам выше явными и неявными случаями.

Следует отметить, что условие, чтобы каждая дуга была меньше полуокружности, не является необходимым. Если же обе, или одна из двух дуг, не обладают синусом, т. е. является полуокружностью или полной окружностью, наша теорема неприменима.

Все дуги, рассматриваемые в теории полного четырехсторонника, всегда меньше полуокружности, но для других фигур одно из указанных выше условий необязательно; при исследовании этих фигур следует различать следующие шесть случаев:

1) обе дуги меньше полуокружности;

2) обе дуги равны полуокружности;

3) обе дуги больше полуокружности;

4) одна из двух дуг меньше, а другая равна полуокружности;

5) одна из двух дуг меньше, а другая больше полуокружности;

6) одна из двух дуг больше, а другая равна полуокружности.

Из этих шести случаев мы рассмотрели 1-й случай. Второй случай мы исключили из рассмотрения. Третий случай приводится к первому, так как если в предыдущей теореме за первую дугу мы примем дугу AEC, а за вторую—дугу AEB, то теорема и ее доказательство останутся без изменения.

К 4-му и 6-му случаям относится то же, что и ко 2-му.

Для 5-го случая мы получаем две теоремы: одна для неявного, другая для явного случая[1].

В самом деле, если в явном случае одна из дуг AB, а другая—AEC, то концы B и C этих дуг расположены с одной и той же стороны диаметра, и хорда может пересечь диаметр только вне круга, т. е. мы получили такую же фигуру, как в рассмотренном выше неявном случае. Точно также, если в неявном случае одна из дуг AB, а другая—AEC, то концы обеих дуг расположены по разные стороны диаметра, и хорда пересекает диаметр внутри круга, т. е. мы получили такую же фигуру, как в рассмотренном выше явном случае.

Этим мы закончим наше рассмотрение этого вопроса.

---

[1] Т. е., соответственно, для случая налагающихся дуг и для случая последовательно расположенных дуг.

Глава II,

в которой говорится о способе определения одних сторон и углов треугольника через другие

Во всяком прямолинейном треугольнике, вписанном в окружность, каждая сторона является хордой угла треугольника. Под хордой угла мы понимаем хорду дуги, соответствующей этому углу. Так как углы относятся между собой, как соответствующие им дуги, то величины дуг можно измерять величинами соответствующих им углов.

Окружность, в которую вписан треугольник, является поэтому мерой всех трех углов этого треугольника. Все астрономы делят окружность на 360 равных частей, а диаметр на 120 частей, за исключением знаменитого Абул Рейхана Бируни[1], который делит диаметр на две части по 120 минут, число которых согласуется, таким образом, с числом другого деления. Эти части астрономы приняли за единицы измерения. Кроме того астрономы дали способы определения одних дуг, хорд и синусов через другие с помощью геометрических методов, как это изложено в начале „Алмагеста" и в некоторых других книгах.

К этому следует добавить, что в астрономических вычислениях, так же как и при изучении фигур, необходимо уметь определять одни стороны угла и углы плоского прямоугольного треугольника. Для этого устанавливают теоремы о дугах и хордах или же о дугах и синусах.

Изложим сначала теоремы о дугах и хордах, относящиеся к прямоугольным треугольникам.

В прямоугольном треугольнике могут быть известны угол, отличный от прямого угла, или две стороны, или же одна сторона и один угол, отличный от прямого угла. Поэтому необходимо рассмотреть три случая.

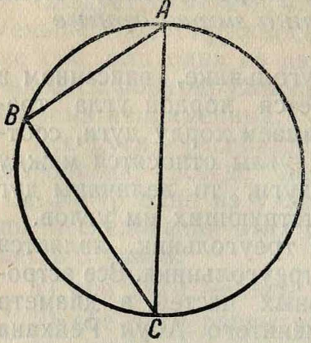
1) Если известен только угол, отличный от прямого угла, то можно найти третий угол и треугольник будет решен относительно его углов и отношений сторон; однако в этом случае невозможно узнать истинные величины его сторон.

2) Если известны две стороны, то можно найти третью сторону, извлекая квадратный корень из суммы или из разности квадратов двух сторон, а когда определены три стороны, можно найти также три угла. Пусть ABC—вписанный прямоугольный треугольник; отношение хорды прямого угла[2] AC к линии AB будет равно отношению 120

[1] Абу Рейхан Бируни ابوالريحان البيرونى—знаменитый узбекский математик, родился в Хорезме в 973 г., умер в 1038 г.

[2] Т. е. гипотенузы прямоугольного треугольника, вписанного в окружность.

частей, представляющих весь диаметр, к линии AB, измеренной в той мере, в которой диаметр равен 120. Определив AB в этой мере, мы найдем также дугу AB, являющуюся мерой угла ACB. Мерой угла BAC будет дополнение этой дуги до полуокружности.



3) Если известны один угол и одна сторона, то известный угол позволит определить неизвестный угол и хорды углов и три стороны будут выражены в той мере, в которой хорда прямого угла, т. е. диаметр, будет равен 120; отношение известной стороны к другой стороне будет равно отношению хорды угла, имеющего хордой известную сторону, к хорде угла, имеющего хордой другую сторону, измеренной в той мере, в которой хорда прямого угла равна 120. Таким образом мы определили эту неизвестную сторону треугольника. Точно так же мы определим и третью сторону треугольника.

В случае непрямоугольных треугольников, если известна только одна сторона или две стороны, или один угол и одна сторона, невозможно определить другие углы и стороны. Для этого необходимо знать два угла и одну сторону, или две стороны и один угол, или же три стороны.

Поэтому здесь нужно рассмотреть четыре случая.

1) Известны два угла. Так как сумма дуг этих углов дополняет дугу 3-го угла до полной окружности, мы найдем 3-й угол. Отсюда найдем стороны в той мере, в которой диаметр равен 120, истинные же величины сторон остаются неизвестными.

В этом случае мы будем говорить, что треугольник определен по своей форме.

2) Известны два угла и одна сторона. В этом случае мы определим 3-й угол и остальные две стороны, так как отношение известной стороны к неизвестной стороне равно отношению величин этих сторон, измеренных в той мере, в которой диаметр равен 120[1].

Таким образом мы определим одну из неизвестных сторон и таким же образом поступим для определения другой неизвестной стороны.

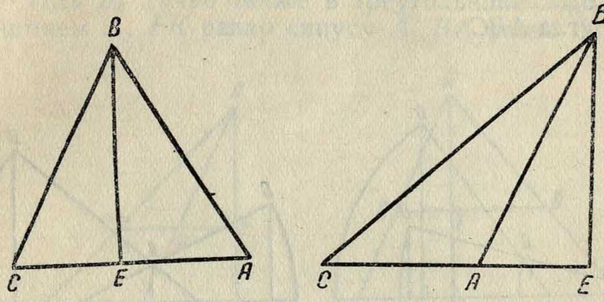
3) Известны две стороны и один угол. Если этот угол

---

[1] Отсюда соответствующий угол определяется с помощью таблиц синусов.

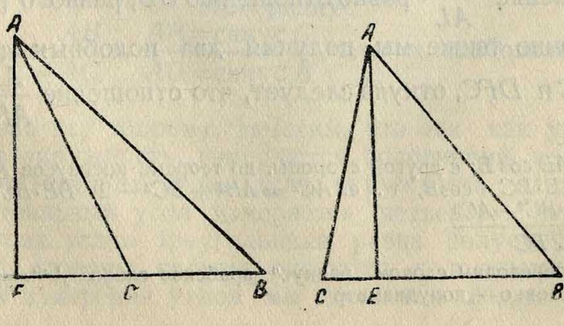
лежит против одной из известных сторон, то отношение хорды этого угла к другой известной стороне, будет равно отношению величин этих сторон в той мере, в которой диаметр равен 120.

Так же найдем 3-й угол и 3-ю сторону. Если же известный угол находится между двумя известными сторонами, как например угол A между двумя сторонами AB и AC, то опустим из B на AC перепендикуляр BE. Тогда мы получим прямоугольный треугольник BEC, в котором нам известны



сторона AB и угол A; по ним найдем BE и EA и, таким образом, снова получим один из предыдущих случаев—случай, когда BE и CE известны; тогда найдем BC и угол C, как указано выше.

4) Известны стороны треугольника. Рассмотрим треугольник ABC. Опустим перпендикуляр AE из точки A на BC; если мы возьмем разность между двумя квадратами BA, BC и квадратом AC и разделим ее на удвоенное BC, то частное будет равно BE и тогда корень из разности квадрата AB и квадрата BE даст величину перпендикуляра.



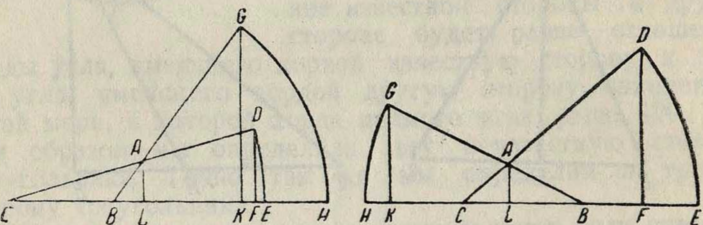
Таким образом мы получим два прямоугольных треугольника, углы которых мы определим, а с помощью этих углов мы определим и углы треугольника ABC.

В этом состоит способ дуг и хорд.

Перейдем к способу дуг и синусов. Для этого докажем следующую теорему:

Отношение сторон равно отношению синусов углов, лежащих против этих сторон.

Пусть дан треугольник ABC. Я утверждаю, что $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{синус угла } ACB}{\text{синус угла } ABC}$.



Доказательство. Продолжим BC до линии CE, равной 60 единицам. Из точки C, как из центра, опишем дугу ED и продолжим CA до ее пересечения с этой дугой в D.

Из D опустим перпендикуляр DF на CE, DF равен синусу угла ACB. Продолжим также BC до линии BH, равной 60 единицам. Из точки B как из центра опишем дугу HG, которая пересечется в точке G с продолжением AB. Опустим перпендикуляр GK, равный синусу угла ABC. Из A опустим перпендикуляр AL на CE, тогда мы получим два подобных треугольника ABL и GBK, откуда следует, что отношение $\frac{AB}{AL}$ равно отношению GB, равного радиусу[2], к GK. Точно также мы получим два подобных треугольника ALC и DFC, откуда следует, что отношение $\frac{AL}{AK}$ равно

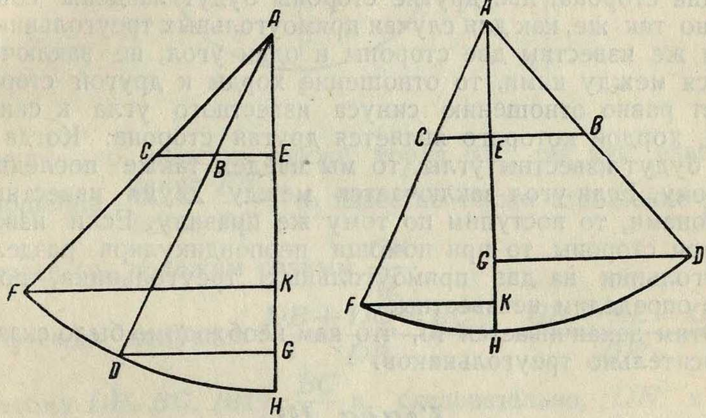
---

[1] $BE = AB\cos B$; с другой стороны, по теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC \cos B$, т. е. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BE\cdot BC$; поэтому $BE = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2\,BC}$.

[2] Мы переводим словом „радиус“ арабское слово نصف القطر („нисфул гутур“), дословно—„полудиаметр“.

отношению DF к DC, равному радиусу. Умножая эти равенства, мы получим, что отношение $\frac{AB}{AC}$ равно $\frac{DF=\text{синус } ACB}{GK=\text{синус } ABC}$, что и требовалось доказать.

Иначе. Опустим перпендикуляр AE на BC; продолжим AB и AC до тех пор, пока AF и AD не станут равными 60 единицам, т. е. радиусу. Из точки A, как из центра, опишем дугу DH. Опустим перпендикуляры FK и DG на AH. Так как в треугольнике ABE угол E прямой, то B будет дополнением A; DG равна синусу угла A, AG равна синусу угла B. Точно также в треугольнике AEC C будет дополнением A, FK равно синусу A, KA равно синусу C.



Вследствие подобия треугольников ABE и ADG отношение $\frac{AB}{AE}$ равно отношению $\frac{AD=\text{радиус}}{AG=\text{синус } B}$. Точно также вследствие подобия треугольников AEC и AKF отношение $\frac{AE}{AC}$ равно отношению $\frac{AK=\text{синус } C}{AC=\text{радиус}}$. Умножая эти равенства, мы находим $\frac{AB}{AC}=\frac{AK=\text{синус } C}{AG=\text{синус } B}$, что и требовалось доказать.

Доказав эту теорему, заметим, что так как углы, вписанные в окружность, измеряются половинами центральных углов, отсекающих те же дуги окружности, так что прямой центральный угол измеряется четвертью окружности, и мера трех углов треугольника равна полуокружности, а с другой стороны синусы являются половинами хорд, то если для измерения углов мы заменяем хорды синусами, мы вместо вписанных углов пользуемся центральными углами.

Поэтому, если в прямоугольном треугольнике нам известны стороны, то, по способу синусов, отношение хорды прямого угла[1] к одной из его сторон будет равно отношению радиуса к синусу угла, хордой которого является эта сторона, а по синусу определим угол. Если же даны один угол и одна сторона, то определим неизвестный угол, а отношение синуса угла, хордой которого является известная сторона, к синусу другого угла будет равно отношению известной стороны к другой стороне. Отсюда определим стороны.

В случае других треугольников, если известны два угла и одна сторона, две другие стороны будут найдены совершенно так же, как для случая прямоугольных треугольников. Если же известны две стороны и один угол, не заключающийся между ними, то отношение хорды к другой стороне будет равно отношению синуса известного угла к синусу угла, хордой которого является другая сторона. Когда же нам будут известны углы, то мы найдем также последнюю сторону. Если угол заключается между двумя известными сторонами, то поступим по тому же правилу. Если известны три стороны, то при помощи перпендикуляра разделим треугольник на два прямоугольных треугольника, после чего определим неизвестные.

Этим заканчивается то, что нам необходимо было сказать относительно треугольников.

Глава III,

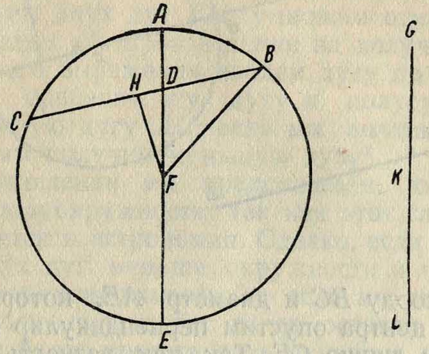
в которой излагаются некоторые правила, полезные для применения теории полного четырехсторонника

Если на окружности известна сумма двух неравных последовательных дуг, которая будет меньше полуокружности, и если, кроме того, известно отношение синусов этих двух дуг, то можно найти каждую из этих двух дуг.

Пусть на окружности ABC даны две дуги AB и AC, концы которых совпадают в точке A. Пусть известна сумма этих дуг BAC, меньшая полуокружности, а также отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}$. Я утверждаю, что можно найти каждую из дуг AB и AC.

[1] Т. е. гипотенузы (термин перенесен с прямоугольных треугольников, вписанных в окружность).

Доказательство. Проведем хорду BC и диаметр AE, которые пересекутся в D. Из центра опустим перпендикуляр FH на CB и проведем линию BF. Так как дуга BAC



известна, то известна также хорда BC; так как известно отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}$, то известно также отношение $\frac{DB}{DC}$, которое мы положим равным $\frac{GK}{KL}$.

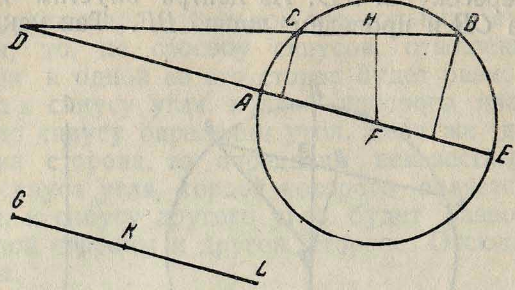
Отсюда получаем $\frac{DB + DC = BC}{DB} = \frac{GK + KL = GL}{GK}$.

Поэтому DB, BC, $BH = \frac{BC}{2}$ и, следовательно, DH и FH известны.

Теперь в прямоугольном треугольнике DHF известны две стороны прямого угла и, следовательно, угол DFH. Кроме того, BHF, соответствующий половине дуги BC, известен. Таким образом, мы найдем угол BFA, соответствующий дуге BA, и, следовательно, дуги AB и AC, что и требовалось доказать.

Если на окружности известна разность двух неравных, налагающихся друг на друга дуг с общим концом, каждая из которых меньше полуокружности, и если, кроме того, известно отношение синусов этих дуг, то можно найти каждую из этих дуг.

Пусть на окружности ABC даны две дуги AC и ACB, имеющие общим концом точку A. Пусть дуга BC, являющаяся разностью этих двух дуг, известна, так же как отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}$. Я утверждаю, что можно найти каждую из дуг AB и AC.



Проведем хорду BC и диаметр AE, которые пересекаются в D. Из центра опустим перпендикуляр FH на хорду BC и проведем линию CF. Так как разность наших друг BC известна, известна и хорда BC и половина этой хорды HC. Так как известно отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}$, то известно также отношение $\frac{BD}{CD}$, которое мы положим равным $\frac{GL}{KL}$.

Поэтому $\frac{BC}{CD}=\frac{GK}{KL}$. Отсюда найдем DC и HD; известна также линия HF, равная косинусу[1] половины дуги BC. Таким образом в прямоугольном треугольнике HFD известны две стороны HD, HF и, следовательно, угол HFD, а также известен угол HFC, измеряемый половиной дуги BC. Отсюда найдем угол CFA, а затем дугу AC, и следовательно, дугу AB, что и требовалось доказать.

Очевидно, что если синус дуги AB больше синуса дуги AC, то пересечение происходит со стороны A, а в противном случае пересечение происходит со стороны E.

Если синусы равны, то хорда будет параллельна диаметру.

Способ вычисления в первом случае без доказательства

Умножим синус полусуммы двух дуг на больший из двух членов данного отношения; разделим полученное про-

[1] Мы переводим словом „косинус" арабское выражение جيب تمام (джайб тамам), дословно—„синус дополнения". (Латинское слово „cosinus" также является сокращением выражения „sinus complementi", также обозначающего „синус дополнения". Под словами „косинус дуги" здесь понимается то, что мы обычно называем *линией косинуса* угла, соответствующего этой дуге.

изведение на сумму двух членов и удвоим частное, тогда получим DC. Вычтем из DC синус полусуммы двух дуг; полученную разность, равную линии DH, будем называть отмеченной линией[1]. Извлечем квадратный корень из суммы квадрата отмеченной величины и квадрата косинуса полусуммы двух дуг FH; умножим отмеченную линию на 60 и разделим это произведение на полученный корень; для полученного выражения найдем дугу по таблице синусов; если мы прибавим эту дугу к полусумме дуг, мы получим бóльшую дугу AC; если мы вычтем эту дугу из полусуммы, мы получим меньшую дугу[2].

В этом вычислении мы предполагали, что сумма двух дуг меньше полуокружности, так как этот случай наиболее часто встречается в астрономии. Однако, если предположить, что сумма двух дуг меньше окружности и что каждая из двух меньше полуокружности, то если мы вычтем каждую из них из полуокружности, тогда остаток от вычитания большей дуги будет представлять меньшую дугу, а остаток от вычитания меньшей дуги будет представлять большую дугу, и мы получим, таким образом, искомые дуги.

Если же сумма двух дуг равна полуокружности или целой окружности, то этим способом мы не сможем определить дуги.

Способ вычисления во втором случае без доказательства

Умножим HC, синус полуокружности двух дуг, на больший из двух членов данного отношения и разделим произведение на разность двух членов отношения; удвоим частное и получим BD. Вычтем из него синус полуразности. Остаток, равный HD, мы будем называть отмеченной линией. Извлечем квадратный корень из суммы квадратов отмеченной линии и квадрата косинуса полуразности, умножим отмеченную линию на 60 и разделим на полученный корень. Для полученного выражения найдем дугу по таблице синусов; если мы прибавим к этой дуге полуразность, мы

---

[1] Мы переводим выражением „отмеченная линия“ арабское слово محفوظ (махфуз), дословно—„удержанное“ (в памяти).

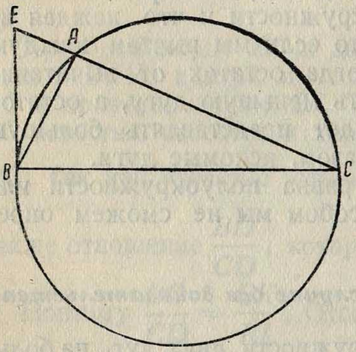
[2] Так как $\dfrac{\text{синус } AB = BD}{\text{синус } AC = CD}$, то если синус AC, синус AB

$$\frac{2\,BH \times \text{синус } AC}{\text{синус } AB + \text{синус } AB} = \frac{2\,BH \times CD}{BD + CD} = \frac{2\,BH \times CD}{BC} = CD.$$ Отмеченная линия равна $DC - BH = DC - CH = DH$; из прямоугольного треугольника DFH находим $FD = \sqrt{DH^2 + FH^2}$ и синус $\dfrac{HFD}{AB} = \dfrac{DH \times B}{DF}$. Тогда дуга AC равна сумме дуги, равной полусумме дуг AB и AC с другой, соответствующей углу HFD, а дуга равна разности тех же дуг.

получим бóльшую дугу BCA; если мы вычтем из этой дуги полуразность, мы получим меньшую дугу AC и вычисление на этом окончится, если синус большей дуги больше синуса меньшей. В противном случае мы вместо этих дуг берем дополнения. Если же два синуса равны, т. е. если два члена отношения равны, то мы не нуждаемся в этом вычисления, так как тогда половина дополнения разности является меньшей дугой[1].

Другой способ Эмира Абу Насра ибн Ирака[2]

Начертим окружность и рассмотрим на этой окружности две дуги AC и CB, равные удвоенным неизвестным дугам, для которых известна, однако, сумма и отношение синусов или же известна разность половин дуг ABC и BC, равная половине дуги AB, и отношение синусов этих дуг.



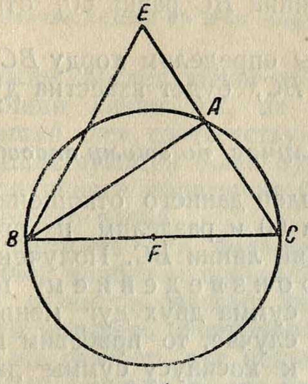
Проведем хорды AB, BC и CA. Известна AB, т. е. хорда удвоенной дуги суммы двух искомых дуг или же хорда их удвоенной разности. Неизвестны хорды AC и CB, т. е. хорды двух удвоенных неизвестных дуг. Из точки B опустим на хорду AC перпендикуляр BE; здесь можно рассмотреть пять случаев, в зависимости от того попадает ли перпендикуляр:

1) вне треугольника со стороны A;
2) на линию AB, с которой он совпадет;
3) внутри треугольника;
4) на линию BC, с которой он совпадет;
5) вне треугольника со стороны.

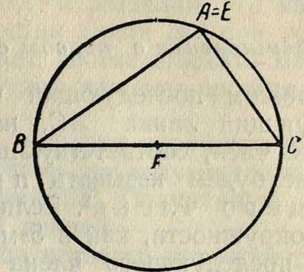
---

[1] Так как $\frac{\text{синус } ACB}{\text{синус } AC}=\frac{DB}{DC}$, то если синус $ACB >$ синус AC $\frac{2\,HC \times \text{синус } ACB}{\text{синус } ACB - \text{синус } AC}=\frac{2\,HC \times BD}{BD-CD}=\frac{2\,HC \times BD}{BC}=BD$. Отмеченная линия равна $BD-HC=BD-BH=DH$; из прямоугольника DFH находим $FD=\sqrt{DH^2+FH^2}$ и синус $HFD=\frac{DH \times R}{DF}$. Тогда дуга ACB равна сумме дуги, равной полуразности дуг ACB и AC с дугой, соответствующей углу HFD, а дуга AB равна разности тех же дуг.

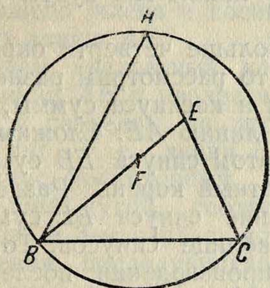
[2] Эмир Абу Наср ибн Ирак (امیرآبونصربن عراق) астроном и математик X века.



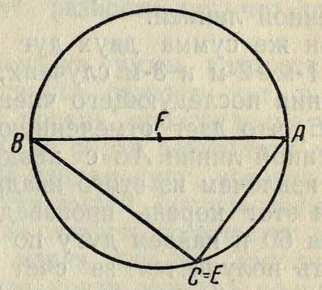
1



2



3

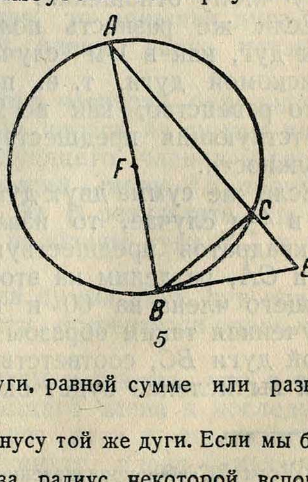


4

Во всех этих случаях в прямоугольном треугольнике BEC известны величины двух сторон BE и CE, измеренные в той мере, в которой линия BC равна 60 единицам[1].

Так как отношение $\frac{BC}{AC}$ известно, то известна также линия AC, в той же мере.

Следовательно, будет известна линия AE, а по линиям AE и EB, заключающим прямой угол, мы найдем величину



5

[1] Отношение $\frac{EC}{BC}$ равно косинусу дуги, равной сумме или разности искомых дуг, а отношение $\frac{EB}{BC}$ равно синусу той же дуги. Если мы будем считать линию BC за 60 единиц, т. е. за радиус некоторой вспомогательной окружности, то, по терминологии автора, линии EC и EB являются соответственным „косинусом“ и „синусом“ дуги, равной сумме или разности искомых дуг.

AB, в той мере, в которой линии BC равна 60, откуда мы определим углы BCE и BCA.

Поэтому зная хорду AB, мы определим хорду BC, и, как только будет известна хорда BC, будет известна дуга BC.

Вычисление в первом случае по этому способу.

Умножим последующий член данного отношения, соответствующий линии AC, на 60 и разделим на предшествующий член, соответствующий линии BC. Полученное выражение будем называть произведением последующего члена[1]. Если сумма двух дуг меньше четверти окружности, как в 5-м случае, то прибавим произведение последующего члена к косинусу суммы двух дуг, т. е. к линии CE. Полученную линию AE будем называть отмеченной линией.

Если же сумма двух дуг больше четверти окружности, как в 1-м, 2-м и 3-м случаях, то рассмотрим разность произведения последующего члена и косинуса суммы, т. е. линии CE, что даст отмеченную линию AE. Сложим квадрат отмеченной линии AE с квадратом синуса EB суммы двух дуг и извлечем из этого квадратный корень. Разделим, далее, на этот корень произведение синуса BE суммы двух дуг на 60 и найдем дугу по таблице синусов. Тогда, если разность получается за счет произведения последующего члена, как в 3-м случае, то эта дуга будет искомой дугой, т. е. половиной дуги BAC, соответствующей предшествующему члену отношения.

Если же разность получается за счет косинуса суммы двух дуг, как в 1-м случае, то эта дуга будет дополнением искомой дуги, т. е. половиной дуги BAC. Если имеет место равенство, как во 2-м случае, то искомая дуга, соответствующая предшествующему члену, равна четверти окружности.

Если же сумма двух дуг ACB равна четверти окружности, как в 4-м случае, то извлечем квадратный корень из суммы квадратов предшествующего и последующего членов CB и CA, разделим на этот корень произведение предшествующего члена на 60 и найдем дугу по таблице синусов; полученная таким образом дуга будет искомой, т. е. половиной дуги BC, соответствующей предшествующему члену. Этим вычисление будет окончено.

---

[1] Если $BC=60$, произведение последующего члена $AC \times \frac{60}{BC}$ равно линии AC, измеренной в той мере, в которой $BC=60$.

Вычисление во 2-м случае по этому способу.

Умножим последующий член данного отношения, соответствующий линии AC, на 60, и разделим его на предшествующий член, соответствующий линии BC, при условии, что предшествующий член будет соответствовать меньшей дуге. Полученное выражение будем называть произведением последующего члена.

Если разность дуг больше четверти окружности, как в 5-м случае, прибавим произведение последующего члена к косинусу разности, равному линии CE. Полученную линию AE будем называть отмеченной линией.

Если же разность дуг меньше четверти окружности, как в 1-м и 3-м случаях, то мы возьмем разность произведения последующего члена и косинус разности дуг, что даст отмеченную линию AE.

Извлечем квадратный корень из суммы квадрата отмеченной линии AE и квадрата синуса разности дуг, т. е. линии EB, и разделим на этот корень произведение синуса разности дуг, т. е. линии EB, на 60; в результате мы получим синус, по которому мы найдем дугу, которая будет или меньшей дугой, соответствующей предшествующему члену, или, в 3-м случае, когда разность получается за счет произведения последующего члена, или же дополнением меньшей дуги, как в 1-м случае, когда разность получается за счет косинуса разности.

Если же произведение последующего члена и косинус разности равны, как во 2-м случае, то меньшая дуга, соответствующая предшествующему члену, равна четверти окружности.

Если же разность двух дуг равна четверти окружности, как в 4-м случае, то мы извлечем корень из суммы квадратов предшествующего и последующего членов и разделим на этот корень, соответствующий линии AB, произведение предшествующего члена на 60. В результате мы получим синус меньшей дуги, т. е. половины дуги BC, и вычисление будет окончено.

Этот случай, т. е. случай, когда сумма двух дуг или их разность равна четверти окружности, встречается очень часто в научных вычислениях.

Можно также итти другим путем и сказать, что в случае, когда отношение предшествующего члена к последующему члену равно отношению синуса дуги к ее косинусу, отношение квадрата предшествующего члена к квадрату последующего члена будет равно отношению квадрата синуса к квадрату косинуса.

Отсюда, применяя правило производной пропорции, мы найдем, что отношение суммы квадратов предшествующего и последующего членов к квадрату одного из них равно отношению суммы квадрата синуса дуги и квадрата косинуса дуги, т. е. квадрата радиуса к квадрату синуса или косинуса дуги.

Поэтому отношение квадратного корня из суммы квадратов предшествующего или последующего членов к одному из них равно отношению радиуса к синусу или косинусу дуги.

Таким образом, указанная выше операция выполнена.

Польза этой операции состоит в том, что она позволяет по известной сумме или разности двух дуг и отношению синусов этих дуг определить эти дуги.

Все сказанное нами весьма полезно для применения теории полного четырехсторонника, о чем мы будем говорить в дальнейшем.

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ

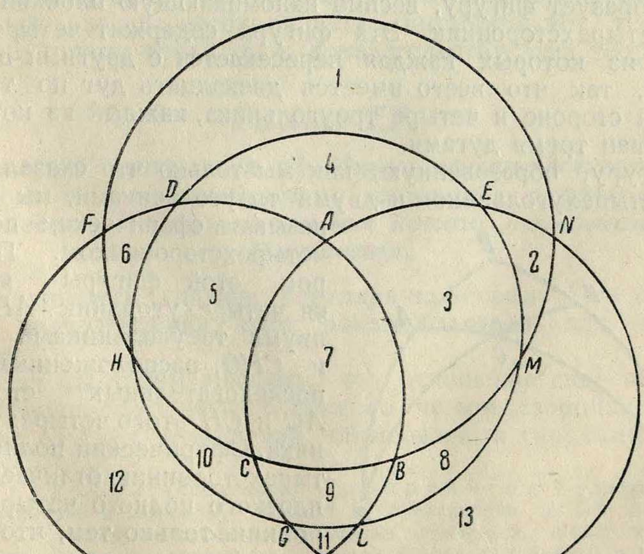
О СФЕРИЧЕСКОМ ПОЛНОМ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКЕ И ИМЕЮЩИХСЯ В НЕМ ОТНОШЕНИЯХ

В этой книге содержится пять глав

Глава I

в которой говорится о том, из чего состоит сферический полный четырехсторонник, а также о теоремах, относящихся к имеющимися в нем отношениях

Если на поверхности сферы имеются четыре больших круга, из которых в каждой точке пересекается не более чем два круга, то эти круги пересекаются в 12 точках.

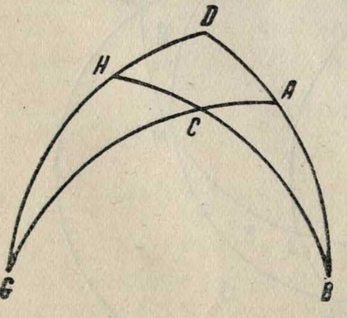


Каждая из полученных дуг является стороной некоторой фигуры. Число этих дуг равно двадцати четырем. При этом поверхность сферы будет разделена на 14 частей: шесть четырехугольников и восемь треугольников. Каждая из 24 дуг является одновременно стороной одного четырехугольника и одного треугольника и угол при вершине каждой из этих фигур имеет вертикальным углом угол другой фигуры того же рода. Четырехугольники примыкают друг к другу только одними углами, а сторонами—к треугольникам: совершенно так же обстоит дело с треугольниками.

Рассмотрим четыре больших круга $ABKF$, $BCFN$, $ACKN$, $EDGL$. Они пересекаются в 12 точках A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N. 1-й круг делится этими точками на 6 дуг AB, BL, LK, KF, FD, DA, 2-й—на 6 дуг BC, CH, HF, FN, NM, MB, 3-й—на 6 дуг AE, EN, NK, KG, GC, CA, 4-й—на 6 дуг EM, ML, LG, GH, HD, DE. При этом на поверхности сферы образуется 6 четырехугольников $AEMB$, $ACHD$, $BLGC$, $DFNE$, $FHGK$ и $KNML$ и 8 треугольников ABC, ADE, BML, CGH, DHF, EMN, GLK и FNK. Углы с вершиной в точке A, например, принадлежат двум треугольникам ACB, ADE и двум четырехгольникам $AEMB$, $ACHD$, а дуга AB, например, принадлежит одному треугольнику ABC и одному четырехугольнику $AEMB$.

Каждый четырехугольник вместе с двумя треугольниками, примыкающими к двум его последовательным сторонам, образует фигуру, весьма напоминающую плоский полный четырехсторонник. Эта фигура содержит четыре стороны, из которых каждая пересекается с другими в трех точках, так что всего имеется двенадцать дуг по три на каждой стороне и четыре треугольника, каждый из которых образован тремя дугами.

Фигуру, образованную, как мы только что сказали, одним четырехугольником и двумя треугольниками, мы будем называть сферическим полным четырехсторонником. Примером этой фигуры является четырехугольник $ADCH$ с двумя треугольниками ABC и CHG, расположенными на последовательных сторонах AC и CH этого четырехугольника. Сферический полный четырехсторонник отличается от плоского полного четырехсторонника только тем, что здесь прямые линии заменены дугами больших кругов.



Всякий четырехугольник определяет, таким образом, четыре сферических полных четырехсторонника. Например, четырехугольник $ADCH$, взятый с треугольниками ABC, CHG; ABC, AED; AED, DHF; DHF, HCG образует четыре сферических полных четырехсторонника; и так как пересечение четырех кругов дает, как мы видели, шесть четырехугольников, то всего на поверхности сферы при этом получится 24 сферических полных четырехсторонника. Эти фигуры будут попарно равны одна другой: так, например, фигура $MNFDAE$ равна фигуре $KLBCHG$. В самом деле, сторона MNF первого сферического полного четырехсторонника равна стороне HCB второго сферического полного четырехсторонника, так как дуги $MNFH$ и $FHCB$ являются полуокружностями (как доказано в теореме XII книги I „Сферики" Теодосия[1], два больших круга при пересечении делятся всегда на две равные части); отнимая от обеих дуг дугу FH, получим $MNF=HCB$. Точно также $MED=HGL$, $ADF=KLB$, $AEN=KGC$. Подобным же образом доказывается, что две стороны двух треугольников, соответствующих двум сферическим полным четырехсторонникам, так же как и четырехугольники, равны и что соответственные углы равны. Отсюда следует, что из 24 сферических полных четырехсторонников 12 равны 12 другим.

Что касается отношений, имеющихся в плоском полном четырехстороннике и изложенных в трех теоремах нашей книги II, то все они оказываются справедливы для синусов дуг всех сферических полных четырехсторонников, что избавляет нас от необходимости повторять эти теоремы. Поэтому прямо перейдем к доказательству этих теорем.

Глава II,

в которой говорится об общем приеме доказательства и о доказательстве теоремы первого рода, известной под названием явного отношения Птолемея.

Мы докажем сначала регулярную теорему 1-го рода, а затем воспользуемся этим доказательством для других теорем.

Когда мы хотим доказать, что отношение синусов двух дуг стороны сферического полного четырехсторонника составлено из двух отношений, образованных синусами четы-

---

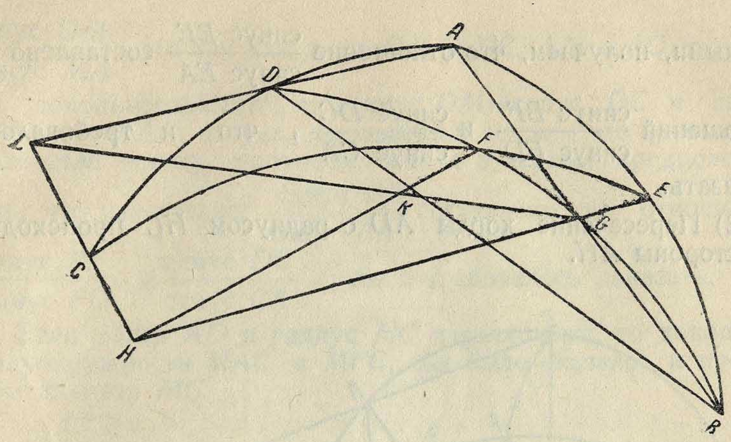
[1] Теодосий (Theodosios) Триполийский—древнегреческий математик и астроном, живший в Александрии в 1-й половине II в. н. э. Главное произведенне Теодосия называется, также как произведение его предшественника Менелая, „Сферика" („Sphairika"). В подлиннике указана арабская траскрипция имени Теодосия — ثاودوسيوس (Саудсйус).

рех других дуг, так что между синусами этих шести дуг имеет место регулярное отношение 1-го рода, мы должны сначала установить, какая сторона и какой треугольник являются *неучаствующими,* как мы делали прежде. Затем мы соединяем прямыми линиями вершины углов неучаствующего треугольника, т. е. проводим хорды дуг, образующих треугольник, а также три прямые линии, выходящие из центра сферы и кончающиеся в трех точках, находящихся на неучаствующей стороне; эти прямые, являющиеся радиусами, обязательно встретят три хорды неучаствующего треугольника, при чем каждый радиус пересечет соответственно хорду. Три точки пересечения радиусов с хордами будут расположены в плоскости треугольника, образованного тремя хордами неучаствующего треугольника, и в то же время в плоскости большого круга, которому принадлежит дуга неучаствующей стороны, т. е. три рассматриваемые точки будут находиться на пересечении этих двух плоскостей. Но Евклид доказывает в своих „Началах", что пересечение двух плоскостей может быть только прямой линией. Поэтому эти три точки будут находиться на одной и той же прямой линии; эта линия образует с тремя хордами неучаствующего треугольника плоский полный четырехсторонник, отношения и свойства которого могут быть использованы для доказательства аналогичных отношений и свойств сферического полного четырехсторонника, с помощью того, что было установлено в нашей книге III. Если одна из этих трех хорд будет параллельна одному из рассматриваемых радиусов, то, как мы покажем, мы получим составное отношение, составленное или из отношения, равного самому составному отношению, и тождественного отношения, или из некоторого отношения и отношения, обратного ему.

Рассмотрим, например, сферический полный четырехсторонник, определяемый 6-ю точками.

Явное отношение Птолемея, т. е. регулярная теорема 1-го рода, состоит в том, что отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$. Здесь дуга EFC будет неучаствующей стороной, ABD—неучаствующим треугольником.

Проведем прямые линии AB, AD, DB—хорды треугольника ABD. Пусть H будет центром сферы; из этой точки проведем к трем точкам C, E, F неучаствующей стороны радиусы HC, HE, HF,—эти три радиуса будут находиться в плоскостях кругов, содержащих дуги неучаствующего



треугольника, в которых будут находиться также хорды этих дуг. Поэтому радиус HE и хорда AB, находящиеся в плоскости круга BEA, встретятся в точке G, радиус HF и хорда BD, находящиеся в плоскости круга BFD, встретятся в точке K, а радиус HC и хорда AD, находящиеся в плоскости круга ADC, могут при продолжении встретиться или быть параллельными.

Предположим сначала, что они пересекаются.

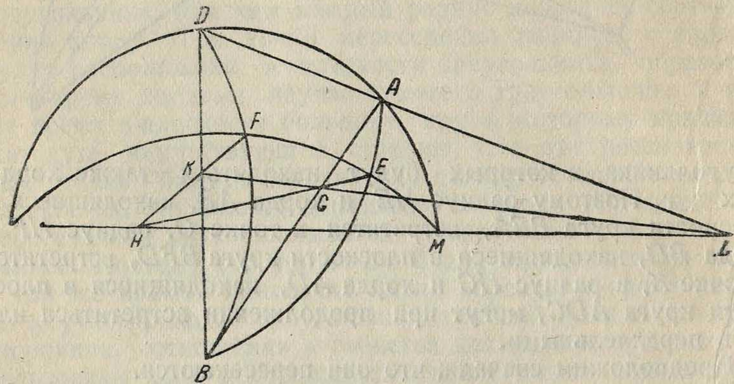
В этом случае эти две линии могут пересекаться или со стороны CD, или же со стороны DA. Отсюда два предположения:

1) Две линии HC и AD пересекаются со стороны CD в точке L, например. В этом случае точки G, K, L будут находиться в плоскости треугольника BAD, образованного хордами неучаствующего треугольника, а также в плоскости круга EFC, являющейся также плоскостью трех радиусов; следовательно, эти три точки G, K, L будут находиться на пересечении этих двух плоскостей, т. е. на прямой GKL, которая с тремя хордами образует плоский полный четырехсторонник $BGADLK$; в этом полном четырехстороннике, как видели выше, отношение $\frac{BG}{GA}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KD}$ и $\frac{DL}{LA}$. Но $\frac{BG}{GA}$ $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$, $\frac{BK}{KD}=\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$, $\frac{DL}{LA}=\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$, как это было установлено в нашей книге III[1], откуда, заменяя отношения $\frac{BG}{GA}$, $\frac{BK}{KD}$, $\frac{DL}{LA}$ им

[1] См. главу III книги III.

равными, получаем, что отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$, что и требовалось доказать.

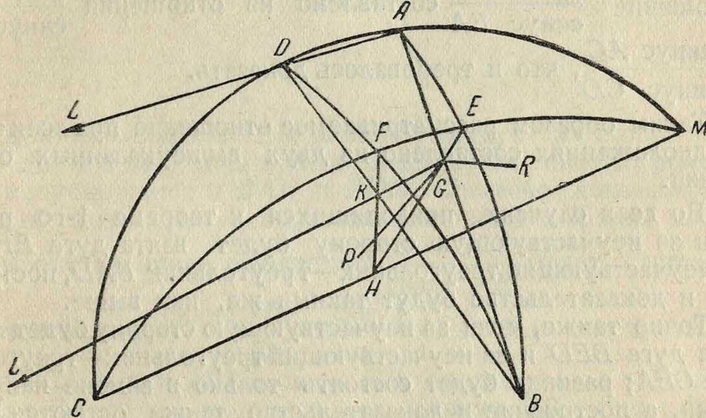
2) Пересечение хорды AD с радиусом HC происходит со стороны AH.



В этом случае следует рассмотреть другой полный четырехсторонник из тех, которые можно образовать на поверхности сферы, и перенести на этот новый полный четырехсторонник все сказанное нами. В этом случае мы продолжаем дуги CDA, CFE до тех пор, пока они не встретятся с другой стороны в точке M, так что CDM и CFM будут полуокружностями, согласно установленному в книге I „Сферики“ Теодосия. Если мы продолжим радиус CH в ту же сторону из точки M, то он встретит хорду DA в L, и три точки K, G, L будут находиться снова на одной и той же прямой линии пересечения плоскости круга EFC неучаствующей стороны с плоскостью ABD хорд неучаствующего треугольника и также получится полный четырехсторонник $BKDALG$, в котором отношение $\frac{BG}{GA}$ будет составлено из отношений $\frac{BK}{KD}$ и $\frac{DL}{LA}$, что равносильно тому, что отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и

$\frac{\text{синус } DM}{\text{синус } MA}$. Но так как дуги DM и DC, AM и AC являются дополнительными[1], то синус DM=синус DC и синус AM=синус AC; откуда, производя в только что указанном равенстве замену, получаем, как и в первом предположении, что отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$, что и требовалось доказать.

Если хорда AD и радиус HC параллельны, то дополним полуокружности MAC и MFC, как было сказано, и проведем диаметр MC.



Я утверждаю, что GK и диаметр MC, которые находятся в плоскости круга MEC, параллельны. Если бы они были параллельны, то они пересеклись бы в некоторой точке L. Тогда три точки LAD находились бы одновременно в плоскости треугольника BAD и также в плоскости круга MAC, т. е. LAD была бы прямой линией и две линии DA, CM пересекутся в L, что противоречит предположению, что DA и CM параллельны. Итак, GK будет параллельна диаметру CM и так же, следовательно, AD. Иначе[2]. Если GK не параллельна диаметру MC и хорде AD, то проведем из точки G в плоскости треугольника ABD линию GP, параллельную AD, а в плоскости круга MFC, линию GR, параллельную MC; тогда GR и AD, будучи параллельными

---

[1] Здесь и всюду в книге IV под дополнительными дугами полагаются дуги, дополняющие друг друга до полуокружности.

[2] Слово „иначе" добавлено редакцией перевода.

MC, будут также параллельны между собой; GR и GP, параллельные AD, также должны быть параллельны между собой; но они сходятся в точке G. Итак, GK параллельна хорде AD. Из треугольника же BAD находим, что $\frac{BG}{GA}=\frac{BK}{KD}$. Но $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}=\frac{BG}{GA}$, $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}=\frac{BK}{KD}$, откуда $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}=$ $=\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$. Кроме того, синус $AC=$синус CD, так как AD параллельна MC, то перпендикуляры, опущенные из A и D на MC и представляющие собою, соответственно, синусы дуг AC и CD, будут равны—следовательно, здесь также отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } CD}$, что и требовалось доказать.

Таким образом рассматриваемое отношение при всех этих предположениях составлено из двух вышеуказанных отношений.

Во всех случаях, приводящихся к теореме 1-го рода, если за неучаствующую сторону будет взята дуга EFC и за неучаствующий треугольник—треугольник BAD, построение и доказательство будут такими же, как выше.

Точно также, если за неучаствующую сторону будет принята дуга BED и за неучаствующий треугольник—треугольник CEA; разница будет состоять только в замене направлений, а построение и доказательство, также остаются без изменения.

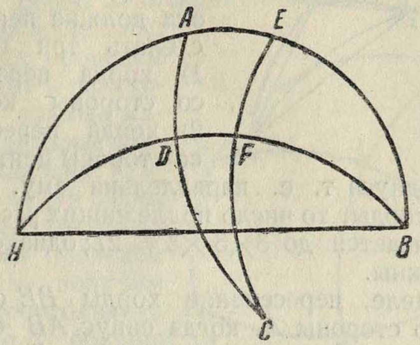
Но мы предпочитаем не входить в подробности этого вопроса.

Глава III,

в которой говорится о доказательстве теоремы, известной под названием неявного отношения Птолемея

Для доказательства неявного отношения Птолемей ограничивается продолжением двух из сторон данного полного четырехсторонника до получения двух полуокружностей. Таким образом он образует новый полный четырехсторонник, посредством которого с помощью доказательства явного отношения он доказывает теорему о неявном отношении.

Рассмотрим полный четырехсторонник $ACFB$. Неявное отношение состоит в том, что отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$.

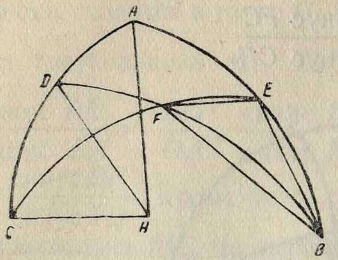


Доказательство. Продолжим каждую из сторон BA и BD до тех пор, пока они не пересекутся, так что получатся полуокружности BAH и BDH. Согласно доказанному в предыдущей главе, в образованном таким образом полном четырехстороннике отношение $\frac{\text{синус } HA}{\text{синус } AE}$ будет составлено из отношений $\frac{\text{синус } HD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$. Но синус $HA =$ синус BA, синус $HD =$ синус DB, следовательно отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } DB}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$, что и требовалось доказать.

Это доказательство применяется в известном предположении. Так как, однако, цель, которая ставится в этом трактате, заключается в том, чтобы охватить все роды теорем и доказательств, относящихся к этой фигуре, и исчерпать все их разновидности, то мы считаем своим долгом привести доказательства, более соответствущие единообразию принципов, которые должны преобладать в систематическом трактате, так что все то, что мы скажем об этой фигуре, составит нечто совершенно целое и стройное во всех своих частях.

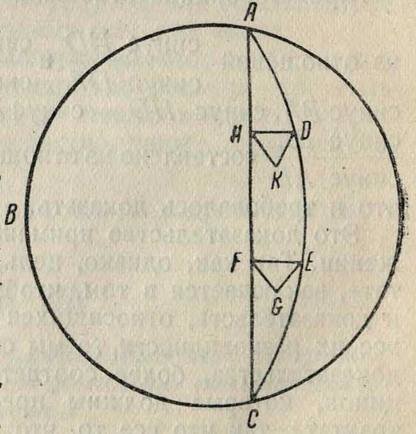
Так как в неявной теореме рассматривается отношение синусов дуг BA и AE, то неучаствующей стороной является дуга ADC, а неучаствующим треугольником—треугольник FEB; проведем хорды FE, EB, FB и три радиуса HC, HD и HA. Согласно общему правилу доказательства хорда

BE пересекает радиус *AH*, хорда *BF* пересекает радиус *HD*, хорда *EF* пересекает радиус *HC*, так что образуется плоский полный четырехсторонник.



Но, имея в виду взаимное расположение каждой хорды относительно радиуса, который она должна пересечь, следует сделать три предположения: 1) хорда пересекает радиус со стороны конца радиуса; 2) хорда пересекает радиус, со стороны центра, 3) хорда не пересекает радиуса т. е. параллельна ему. Так как здесь имеется три хорды, то число подлежащих рассмотрению случаев увеличивается до $3 \times 3 \times 3 = 27$; однако не все эти случаи возможны.

В самом деле, пересечение хорды *BE* с радиусом *AH* происходит со стороны *A*, когда синус *AB* больше синуса *AF*, и, напротив, происходит со стороны *B*, когда синус *AB* меньше синуса *AE*; наконец, две линии параллельны, когда оба синуса равны, и то же самое будет иметь место для двух других хорд. Среди 27 только что упомянутых нами случаев, имеются случаи, когда *BE* пересекает радиус со стороны *E*, *EF* пересекает радиус со стороны *F*, *FB* пересекает радиус со стороны *B*.



Однако эти случаи невозможны; в самом деле, например, в последнем случае, для этого необходимо, чтобы расстояние точки *B* от плоскости круга *ADC* было бы больше, чем то, что больше его[1].

Для лучшего понимания этого вопроса нам кажется необходимым привести следующее разъяснение.

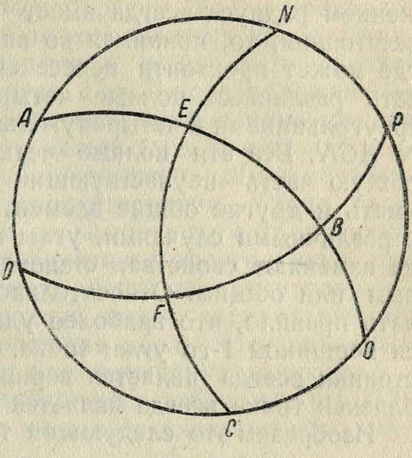
Пусть *AB* большой круг на поверхности сферы, пересекаемый большим кругом *AEC* не под прямым углом, и пусть *AD*, *AE*—две дуги, имеющие различные синусы, так что синус *AE*, например, будет больше, чем синус *AD*[2], тогда

[1] Т. е. больше, чем расстояние точки *E* от той же плоскости, которое, как следует из того условия, что синус *AB* меньше синуса *AE*, должно быть больше данного расстояния.

[2] *ABC* и *AEC*—два больших круга, которые пересекаются, следовательно *AC* будем диаметром, а *EF* и *DH* будут синусами дуг *AD* и *AE*.

утверждаю, что расстояние точки E от плоскости круга ABC больше, чем расстояние точки D от этой же самой плоскости.

Доказательство. Проведем линию AC, которая является пересечением плоскостей двух кругов; из точек D и E опустим на эту линию перпендикуляры HD и FE, которые будут поэтому параллельны; из этих же точек проведем перпендикулярные к плоскости круга ABC прямые линии DK и EG, которые также будут параллельны. Углы HDK и FEG будут равны в силу параллельности их сторон. Если мы проведем линии HK, FG, то получим два подобных треугольника HKD и FGE. Но EF больше HD, следовательно также EG больше DK, т. е. что расстояние точки E от плоскости круга ABC больше, чем расстояние точки D от этой же плоскости, что и требовалось доказать.



Вернемся опять к нашей фигуре дополним круг неучаствующей стороны и продолжим три стороны неучаствующего треугольника до их пересечения с этим кругом в точках N, P, O. Если пересечение между хордой BE и соответственным радиусом происходит со стороны E, то расстояние точки B от плоскости круга ACN больше, чем расстояние E от той же плоскости. Если пересечение хорды EF с соответственным радиусом происходит со стороны F, то расстояние точки E больше расстояния точки F; и, тем более, расстояние B больше расстояния F. Так как эти предположения остаются теми же, если пересечение хорды FB с соответственным радиусом произойдет со стороны B, то расстояние точки F от плоскости ACN должно было бы быть больше, чем расстояние точки B, которое, однако, больше, чем оно само, что является нелепостью.

Установив это, мы можем сказать, что 27 случаев, о которых мы говорили, содержат только тринадцать возможных случаев, остальные же остаются невозможными, так как в отношении расстояний трех точек B, E, F от плоскости круга ACN может быть три случая: 1) все три расстояния различны, 2) два расстояния равны, а одно неравно им, 3) все три расстояния равны между собой.

Отсюда получим три подразделения.

Первое подразделение содержит шесть случаев, так как каждая точка поочередно может быть предположена более удаленной, чем две другие, из которых каждая, попеременно, может быть также предположена более удаленной, чем другая, так что всего получается шесть предположений или шесть родов. Далее, так как пересечение хорды с продолжением радиуса всегда имеет место со стороны меньшего расстояния, то, принимая во внимание различные стороны, где может произойти пересечение, мы должны рассматривать различные полные четырехсторонники, образованные треугольниками и четырехугольниками, заключенными в круге ACN. Все эти полные четырехсторонники будут иметь общую часть—неучаствующий треугольник BEF; они могут иметь и другие общие элементы; при этом, в соответствии с различными случаями, углы неучаствующего треугольника изменяют свойства, становясь поочередно первым, вторым или общим. Относительно этого вопроса надо соблюдать правило, что наиболее удаленная точка всегда является вершиной 1-го угла; точка, находящаяся на среднем расстоянии всегда является вершиной 2-го угла, а наиболее близкая точка всегда является вершиной общего угла.

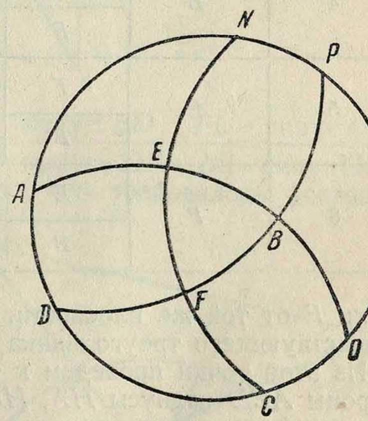
Изобразим это следующей таблицей.

Порядок возможных изменений	1	2	3	4	5	6
Точка, наиболее удаленная	*B*	*B*	*F*	*F*	*E*	*E*
Точка, находящаяся на среднем расстоянии . . .	*E*	*F*	*B*	*E*	*B*	*F*
Точка, наиболее близкая	*F*	*E*	*E*	*B*	*F*	*B*
Вспомогательный полный четырехсторонник, на котором построено доказательство, чтобы затем применить его к данному полному четырехстороннику	*ABCF*	*DNBE*	*PFAE*	*NOFB*	*ODEF*	*CEPB*

Второе подразделение дает также шесть родов, так как два из расстояний между тремя точками могут быть равны в трех случаях, а именно: могут быть равны расстояния между точками B, E; B, F; E, F, и в каждом случае расстояние 3-й точки может быть наибольшим или наименьшим, что и дает шесть случаев. Здесь также, если расстояние 3-й точки является наибольшим, эта точка будет вершиной первого угла, если же оно является наименьшим, эта точка будет вершиной общего угла, в то время как из двух других точек, расстояния которых равны, в 1-м предположении — когда расстояние 3-й точки является наибольшим, каждая из двух равностоящих точек может быть принята за вершину 2-го или общего угла, а во 2-м предположении — когда расстояние 3-й точки является наименьшим — каждая из двух равноотстоящих точек может быть принята за вершину 1-го или 2-го угла. В соответствии с этим изменяется и вспомогательный полный четырехсторонник. Кроме того, в каждом случае имеются два полных четырехсторонника, которые, кроме общего неучаствующего треугольника, при 1-м предположении имеют также общий четырехугольник и отличаются, таким образом, только двумя треугольниками, а при 2-м предположении имеют два общие треугольника и отличаются таким образом, только четырехугольником.

Это указано в следующей таблице (см. таблицу не стр.112).

3-е подразделение состоит из одного единственного случая, когда расстояния точек B, E, F от плоскости круга ACN, содержащего неучаствующую сторону, равны между собой.



Приступим теперь к исследованию каждого из этих тринадцати случаев по отдельности.

Рассмотрим шесть первых случаев, когда все расстояния точек E, F, B неучаствующего треугольника от плоскости неучаствующего круга ACN неравны.

1-случай.

Здесь вспомогательный полный четырехсторонник совпадает с данным четырехсторонником $ABCF$; требуется доказать, что отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } CF}{\text{синус } CE}$.

Доказательство. Расстояние точки B от плоскости круга CDA неучаствующей стороны больше, чем расстояние

Порядок возможных изменеиий	Точка, наиболее удаленная — вершина 1-го угла	Точки, находящиеся на разном расстоянии		Вспомогательный полный четырехсторонник	2-ой угол вспомогательного полного четырехсторонника
		2-й угол	общий угол		
1	*B*	*E*	*F*	*ABCF*	*F*
		F	*E*	*DNBE*	*B*
2	*E*	*B*	*F*	*CEPB*	*E*
		F	*B*	*ODEF*	*F*
3	*F*	*B*	*E*	*PFAE*	*B*
		E	*B*	*NOFB*	*E*

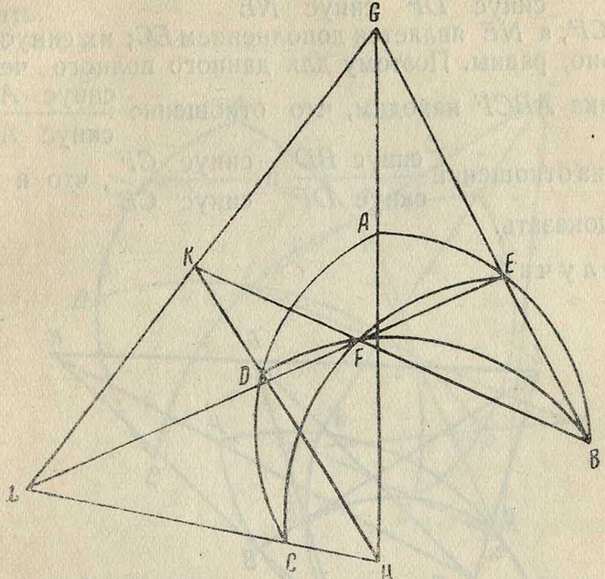
Порядок возможных изменений	Точка, наиболее близкая — вершина общего угла	Точки, находящисся на равном расстоянии		Вспомогательный полный четырехсторонник	2-й угол вспомогательного четырехсторонника
		2-й угол	общий угол		
4	*B*	*E*	*F*	*CEPB*	*F*
		F	*E*	*NOFB*	*E*
5	*E*	*F*	*B*	*PFAE*	*B*
		B	*F*	*DNBE*	*F*
8	*F*	*E*	*B*	*ODEF*	*B*
		B	*E*	*ABCF*	*E*[1]

точки *F* от той же плоскости. Проведем хорды *BE*, *BF*, *EF* неучаствующего треугольника *BEF*; пусть *H*—центр.

Из этой точки проведем к трем точкам неучаствующей стороны *ACD* радиусы *HA*, *HD*, *HC* и продолжим их, так же как и три хорды, до их пересечения. Хорда *BE* обязательно пересечет радиус *AH* со стороны *A*, например, в точке *G*, хорда *BF* пересечет радиус *HD* со стороны *D*, например, в точке *K*, а хорда *EF* пересечет радиус *HC* со стороны *C*, например, в точке *L*. Три точки *G*, *K*, *L* будут находиться одновременно в плоскости трех хорд неучаствующего треугольника и в плоскости круга *ADC* неучаствующей стороны, т. е. на прямой линии *GKL*, являющейся их

[1] Последний столбец этой таблицы в подлиннике искажен.

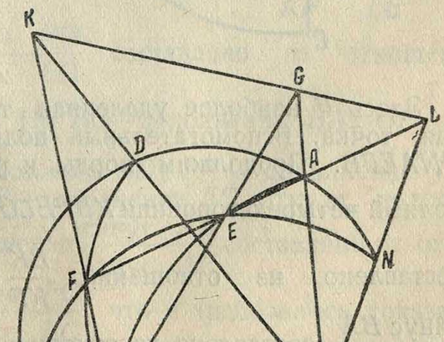
пересечением. Мы получим таким образом плоский полный четырехсторонник *GLFB*, в котором отношение $\frac{BG}{GE}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KF}$ и $\frac{FL}{LE}$.



Но $\frac{BG}{GE}=\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$, $\frac{BK}{KF}=\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$, $\frac{FL}{LE}=\frac{\text{синус } CF}{\text{синус } CE}$, откуда, подставляя, получим то, что требовалось доказать.

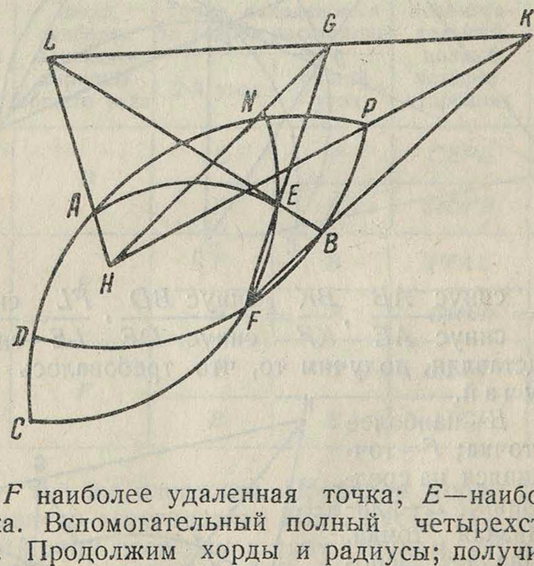
2-й случай.

Здесь *B*—наиболее удаленная точка; *F*—точка, находящаяся на среднем расстоянии; *E*—наиболее близкая точка. *DNBE* составляет вспомогательный полный четырехсторонник. Построим его вместе с данным полным четырехсторонником. Продолжим хорды и радиусы, как указано выше. Мы получим плоский полный четырехсторонник *KGLEBF*, в ко-



тором отношение $\frac{BG}{GE}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KF}$ и $\frac{FL}{LE}$, откуда находим, что отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NE}$. Но FN является дополнением CF, а NE является дополнением EC; их синусы, следовательно, равны. Поэтому для данного полного четырехсторонника $ABCF$ находим, что отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } CF}{\text{синус } CB}$, что и требовалось доказать.

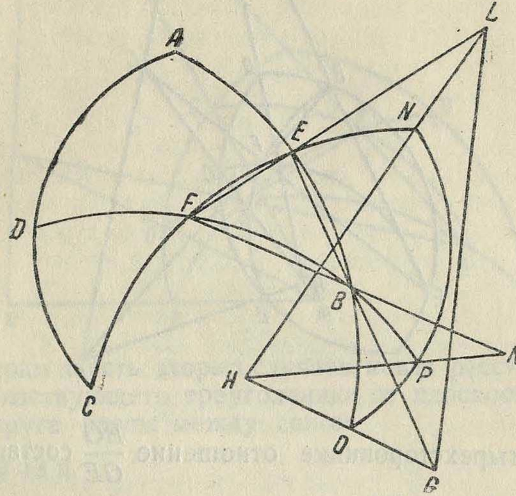
3-й случай.



Здесь F наиболее удаленная точка; E—наиболее близкая точка. Вспомогательный полный четырехсторонник—$PNAEFB$. Продолжим хорды и радиусы; получим плоский полный четырехсторонник $KBFELG$, в котором отношение $\frac{BL}{LF}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KF}$ и $\frac{FG}{GE}$, откуда отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$ и $\frac{\text{синус } EN}{\text{синус } NE}$.

Но BP является дополнением BD, PF является дополнением FD, FN является дополнением CF и NE является дополнением EC. Откуда, подставляя, получаем, что для данного четырехсторонника $ABCE$ отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } CF}{\text{синус } CE}$, что и требовалось доказать.

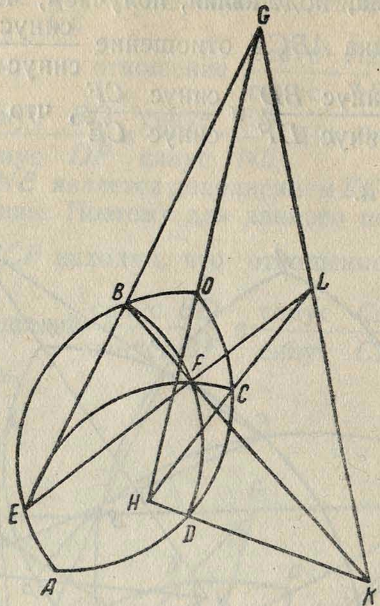
4-й случай.



F — наиболее удаленная точка; B — наиболее близкая точка. Вспомогательный полный четырехсторонник $FENPOB$. Плоский полный четырехсторонник $LKGBFE$, в котором отношение $\frac{BG}{GE}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KF}$ и $\frac{FL}{LE}$, откуда отношение $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } EO}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$ и $\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NE}$. Но BO—дополнение BA; OE—дополнение AE; BP — дополнение BD; PF — дополнение FD; FN—дополнение FC; NE—дополнение EC, откуда, подставляя, получаем, что отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } EC}$, что и требовалось доказать.

5-й случай.

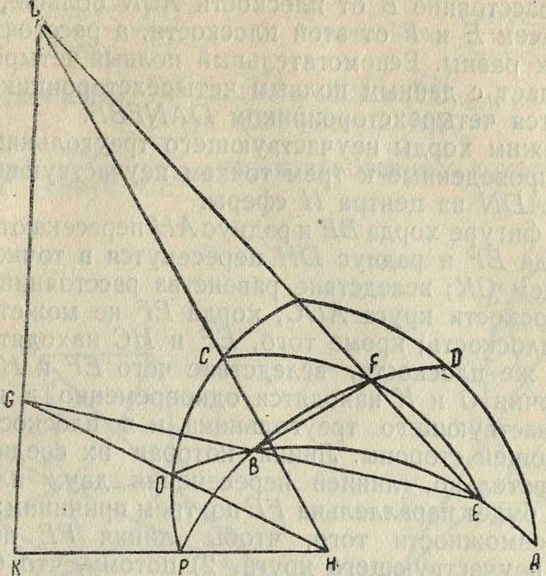
E—наиболее удаленная точка, F—наиболее близкая точка. Вспомогательный полный четырехсторонник $OCDFEB$. Плоский полный четырехсторонник $GLKFEB$. В этом плоском



полном четырехстороннике отношение $\frac{BG}{GE}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KF}$ и $\frac{FL}{LE}$, откуда находим, что отношение $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$. Но BO—дополнение AB, OE—дополнение AE, откуда, подставляя, находим то, что требовалось доказать.

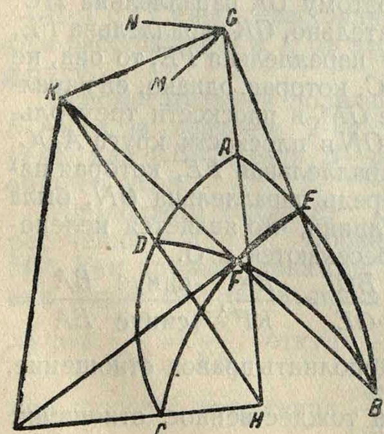
6-й случай.

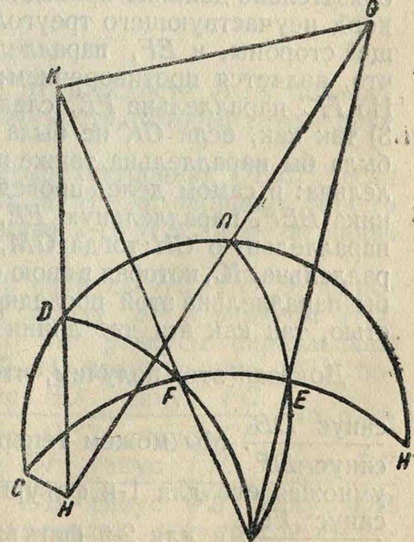
E—наиболее удаленная точка, B—наиболее близкая точка. Вспомогательный полный четырехсторонник $CFEBPO$. Плоский полный четырехсторонник $LGKBEF$. Отсюда получаем, что отношение $\frac{BG}{GE}$ составлено из отношений $\frac{BK}{KF}$ и $\frac{FL}{LE}$, т. е. отношение $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$. Но BO—дополнение AB; OE—дополнение AE; BP—дополнение BD; PF—дополнение DF, откуда получаем то, что и требовалось доказать.



Рассмотрим шесть вторых случаев, когда расстояние двух точек неучаствующего треугольника от плоскости неучаствующего круга равны между собой.

1-й случай.





Здесь расстояние B от плоскости ACN больше, чем расстояния точек E и F от этой плоскости, а расстояния этих двух точек равны. Вспомогательный полный четырехсторонник совпадает с данным полным четырехсторонником $ABCF$ или является четырехсторонником $DANEBF$.

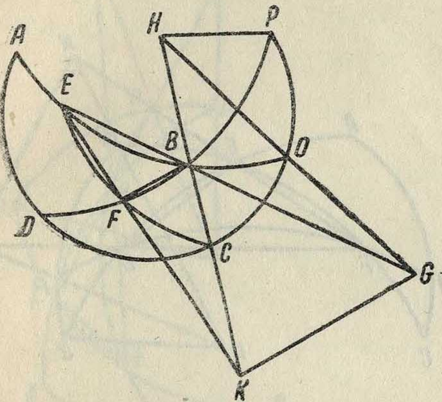
Продолжим хорды неучаствующего треугольника BEF и радиусы, проведенные к трем точкам неучаствующей стороны ADC, ADN из центра H сферы.

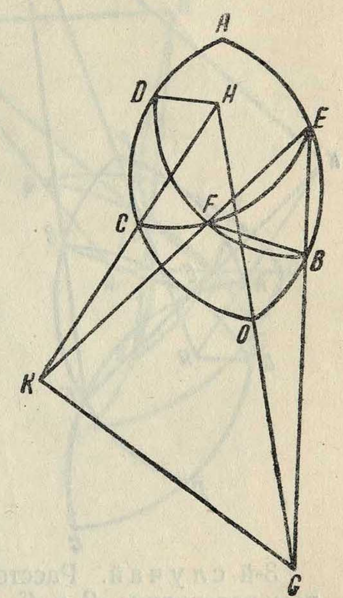
На 1-й фигуре хорда BE и радиус AH пересекаются в точке G, хорда BF и радиус DH пересекутся в точке K.

Проведем GK; вследствие равенства расстояний точек E и F от плоскости круга ADC, хорда EF не может пересекать эту плоскость; кроме того, EF и HC находятся на одной и той же плоскости, вследствие чего EF и HC параллельны. Точки G и K находятся одновременно в плоскости хорд неучаствующего треугольника и в плоскости круга неучаствующей стороны. Линия, которая их соединяет, будет, следовательно, линией пересечения двух плоскостей; эта линия будет параллельна FE по трем причинам: 1) вследствие невозможности того, чтобы линия FE пересекала плоскость неучаствующего круга, 2) потому, что GK и GH являются параллельными линиями; заметим, что GK и CH находятся в одной и той же плоскости—плоскости неучаствующего круга ADC; следовательно, если бы GK и CH не были параллельны, они пересеклись бы в точке L, например; когда FLE была бы прямой линией, так как точки E, F, L обязательно должны принадлежать одновременно плоскости хорд неучаствующего треугольника и плоскости неучаствующей стороны, и EF, параллельная HC, пересекала бы ее, что, является противоречием; поэтому GK параллельна HC. Но HC параллельна FE, следовательно, GK параллельна FE, 3) так как, если бы GK не была бы параллельна FE, то она, не была бы параллельна также и HC, которая, однако, ей параллельна: в самом деле, проведите GM в плоскости треугольника BEF, параллельную FE, и GN в плоскости круга ADC, параллельную CH; тогда GM, параллельная FE, которая параллельна HC, которая в свою очередь параллельна GN, была бы параллельна этой последней линии, что является нелепостью, так как эти две линии пересекаются в G.

Доказав это, получим, что $\dfrac{BG}{GE} = \dfrac{BK}{KF}$, $\dfrac{\text{синус } BA}{\text{синус } EA} = \dfrac{\text{синус } DB}{\text{синус } DF}$. Мы можем теперь дополнить правое отношение, умножая его для 1-й фигуры на тождественное отношение $\dfrac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$, а для 2-й фигуры на тождественное отношение

$\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NF} = \frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$, т. е. отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } EN}{\text{синус } NE}$ или из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$, что и требовалось доказать.

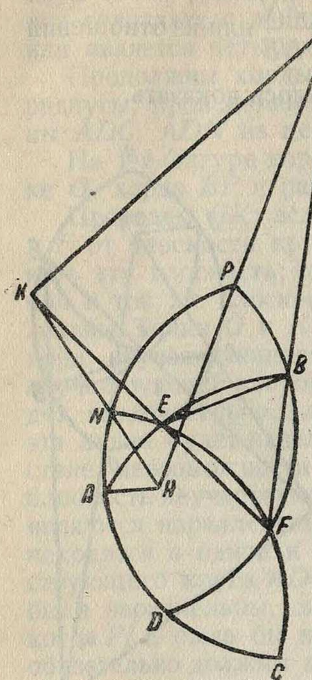


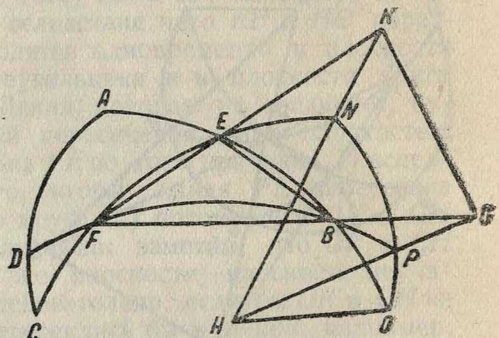


2-й случай. Расстояние E от плоскости ACN больше, чем расстояния B и F от этой плоскости, которые равны друг другу.

Вспомогательный полный четырехсторонник $ODEF$, если F взята за вершину 2-го угла, а B—за вершину общего угла, или $CEPB$, если B—вершина 2-го угла, а F—вершина общего угла.

Продолжим хорды EF, EB и радиусы HC, HO до их пересечения в K и G. Проведем хорду BF и радиусы HD, HP. Как прежде, докажем, что эти радиусы параллельны как хорде BF, так и линии KG. Из треугольника EGK получим $\frac{BC}{GE} = \frac{FK}{KE}$, откуда $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE} = \frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$. Но, с одной стороны, отношения $\frac{\text{синус } DF}{\text{синус } DB}$ и $\frac{\text{синус } FP}{\text{синус } PB} = \frac{\text{синус } DF}{\text{синус } DB}$ являются тождественными отношениями, а с другой стороны, BO—дополнение BA; OE—дополнение EA; BP— дополнение BD; PF—дополнение FD. Откуда, подставляя, получим то, что и требовалось доказать.





3-й случай. Расстояние F от плоскости ACN больше, чем расстояние B и E от этой плоскости, которые равны друг другу.

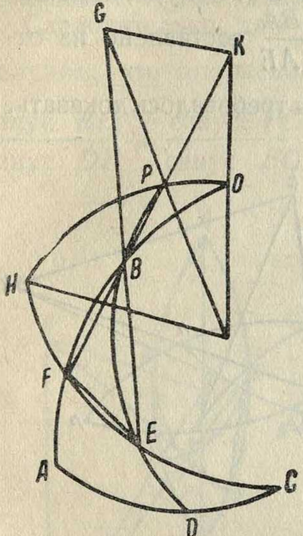
Вспомогательный полный четырехсторонник $NOFB$, когда B—вершина общего угла или $PFAE$, когда E—вершина общего угла.

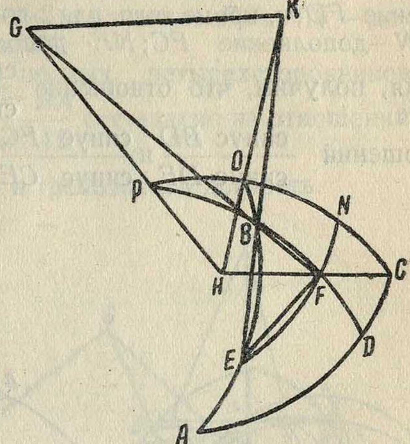
Продолжим хорды FB, FE до их пересечения с радиусами HP, HN в точках G, K. Проведем GK и BE. Эти линии будут параллельны, как было доказано выше. Проведем радиусы HA, HO, они также будут им параллельны. Далее из треугольника FGK находим $\frac{BG}{FG} = \frac{EK}{KF}$, или

$$\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF} = \frac{\text{синус } NE}{\text{синус } NF}.$$

В полном четырехстороннике $NOFB$ отношение $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}$, а в полном четырехстороннике $PFAE$ отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$

являются тождественными отношениями, составленными из отношения $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$ и обратного ему отношения $\frac{\text{синус } NF}{\text{синус } NE}$. Но BP—дополнение BD; PF—дополнение FD; FN—дополнение FC; NE—дополнение EC, откуда получаем то, что и требовалось доказать.

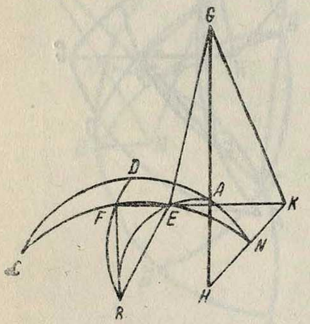


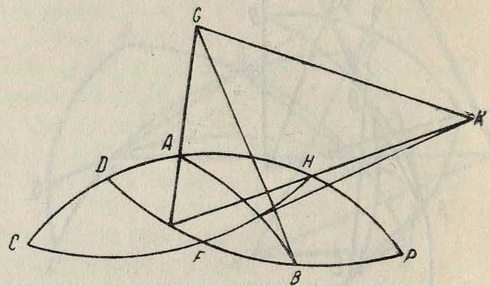


4-й случай. Расстояние B от плоскости ACN меньше, чем расстояние E и F от этой плоскости, которые равны друг другу.

Вспомогательный четырехсторонник $CEPB$, когда E—вершина 1-го угла или $NOFB$, когда F—вершина 1-го угла.

Продолжим хорды EB, FB и радиусы HP, HO до их пересечения в точках G и K; проведем GK, EF и радиусы HC, HN; мы знаем, что они параллельны. Так как треугольники EFB и BGK подобны, то $\frac{KB}{KE}=\frac{BG}{GF}$ или $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}=$ $=\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$. В полном четырехсторооннике $CEPB$ отношение $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$, и тождественного отношения $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } EC}$, а в полном четырехстороннике $NOFB$ отношение $\frac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}$ составлено из отношения $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$ и тождественного отношения $\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NE}$. Но для обоих полных четырехсторонников BO— дополнение BA, OE дополнение EA, BP—дополнение BD, BF—дополнение FD; и, кроме того, для 2-го полного четырехсторонника FN—дополнение FC; NE—дополнение EC. Откуда, подставляя, получим, что отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } CE}$, что и требовалось доказать.





5-й случай. Расстояние E от плоскости ACN меньше, чем расстояние B и F от этой плоскости, которые равны друг другу.

Вспомогательный полный четырехсторонник $PFAE$, когда F вершина 1-го угла, $DNBE$, когда B — вершина 1-го угла.

Продолжим хорды FE, BE и радиусы HN, HA до их пересечения в точках K, G.

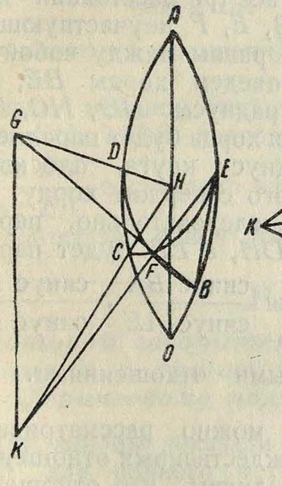
Проведите GK, BF и радиусы HP, HD; мы знаем, что они будут параллельны; треугольники BEF, EKG будут подобны, откуда $\frac{BG}{GE}=\frac{FK}{KE}$ или же $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}=\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NE}$.

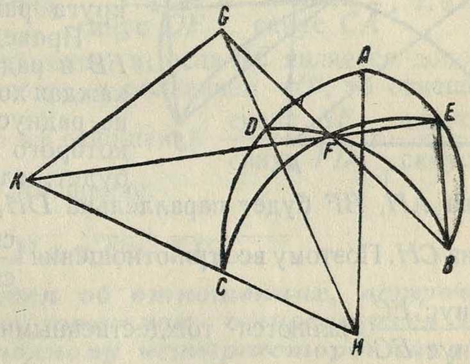
В 1-м полном четырехсторонннике осношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из тождественного отношения $\frac{\text{синус } BP}{\text{синус } PF}$ и отношения $\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NE}$.

Во 2-м полном четырехстороннике отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из тождественного отношения $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и отношения $\frac{\text{синус } FN}{\text{синус } NE}$.

Но BP—дополнение BD; PF—дополнение DF; FN — дополнение FC; NE—дополнение EC.

Следовательно, для обоих полных четырехсторонников получим, что отношение $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } EC}$, что и требовалось доказать.



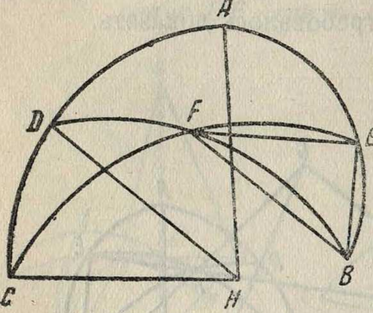


6-й случай. Расстояние F от плоскости ACN меньше чем расстояния B и E от этой плоскости, которые равны друг другу.

Вспомогательный четырехсторонник $ODEF$, когда E—вершина 1-го угла, или $ABCF$, когда B—вершина 1-го угла.

Построим эти полные четырехсторонники, продолжим хорды BF, EF и радиусы HD, HC до их пересечения в точках G, K. Преведем GK, EB, HO, BA. Эти линии будут параллельны, треугольники BEF, FGK будут подобны и получим $\frac{BG}{GK} = \frac{EK}{KF}$, или $\frac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF} = \frac{\text{синус } EC}{\text{синус } CF}$. Но в 1-м полном четырехсторонникe $\dfrac{\text{синус } BO}{\text{синус } OE}$ является тождественным отношением, так же как отношение $\dfrac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}$ в обоих полных четырехсторонниках. Это последнее, следовательно, может рассматриваться в обоих полных четырехсторонниках, как отношение, составленное из отношения $\dfrac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и обратного ему отношения $\dfrac{\text{синус } CF}{\text{синус } CE}$, что и требовалось доказать.

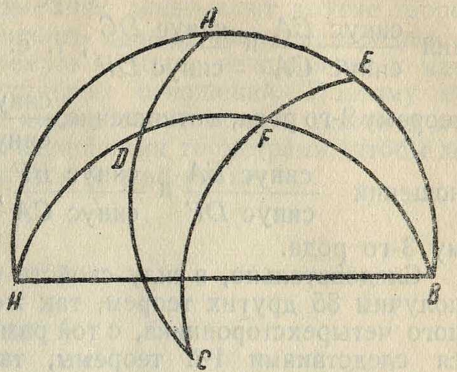
Рассмотрим единственный случай 3-го подразделения.



Этот случай, являющийся последним случаем из 13 возможных случаев, есть тот случай, когда все три расстояния вершин B, E, F неучаствующего круга равны между собой.

Проведем хорды BE, EF, FB и радиусы HD, HC, HA; каждая хорда будет параллельна радиусу круга, плоскость которого содержит хорду. BE будет, следовательно, параллельна AH, BF будет параллельна DH, а EF будет параллельна CH. Поэтому все три отношения $\dfrac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$, $\dfrac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\dfrac{\text{синус } FC}{\text{синус } EC}$ являются тождественными отношениями. Но каждое тождественное отношение можно рассматривать, как составленное из двух других тождественных отношений. Следовательно, и на этот раз получим, что отношение $\dfrac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ составлено из отношений $\dfrac{\text{синус } BD}{\text{синус } DF}$ и $\dfrac{\text{синус } FC}{\text{синус } EC}$, что и требовалось доказать.

На этом кончается доказательство неявного отношения Птолемея: можно итти тем же путем, чтобы доказать любой случай отношения, приводящийся к первой теореме, будет ли неучаствующим треугольник BEF или треугольник DFC. Исследование этих случаев повлекло бы за собой слишком длинные вычисления, которые были бы к тому же излишними для лиц, владеющих этой наукой. Заметим только, что доказав один раз неявное отношение Птолемея, мы можем затем, исходя из этого отношения, доказать явное отношение, идя путем обратным тому, которым шел Птолемей. Таким образом, каждый случай может быть как доказан непосредственно, так и выведен, как следствие. Итак, взяв опять известную фигуру и изменив порядок предложения, мы можем сказать, что если в полном четырехстороннике $EAHDCF$ доказано, что отношение $\frac{\text{синус } EH}{\text{синус } EA}$



составлено из отношений $\frac{\text{синус } HF}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$, т. е. если доказано неявное отношение, и, если BE является дополнением EH, а BF является дополнением HF, то отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$ т. е. доказано явное отношение.

Глава IV,

в которой говорится об отношениях, встречающихся в других теоремах, относящихся к сферическому полному четырехстороннику

Так как мы доказали отношения регулярной теоремы 1-го рода[1] для полного четырехсторонника $ABCF$, то случаи обратных и смешанных отношений как этой 1-й теоремы, так и двух других теорем, о которых мы говорили в книге II, тем самым доказаны в силу свойств составных отношений.

Так, например, если дано явное отношение Птолемея, т. е., если отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } EA}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } FD}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } CA}$, то синусы дуг BE, BF, DC представляют собою 1-е тело[2], а синусы дуг EA, BF, DC—2-е

[1] См. книгу II, главу III.
[2] См. книгу I, предложение X.

тело. Поэтому отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } BF}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } EA}{\text{синус } CA}$ и $\frac{\text{синус } DC}{\text{синус } DF}$, т. е. мы получили регулярную теорему 2-го рода, а отношение $\frac{\text{синус } BE}{\text{синус } DC}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } EA}{\text{синус } DF}$ и $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } CA}$, т. е. мы получим теорему 3-го рода.

Следовательно, в силу свойств составных отношений, мы получим 35 других теорем, так же как и для плоского полного четырехсторонника, с той разницей, то все они являются следствиями 1-й теоремы, так же мы видели в конце главы II книги II, что регулярная теорема 1-го рода является основной всех других теорем.

Существует поразительное сходство между этими теоремами и формами силлогизма в логике, где все формы силлогизма также являются следствиями первой формы.

Глава V,

в которой указывается польза, получаемая от полного четырехсторонника, и завершается теория этой фигуры

Польза от полного четырехсторонника заключается в том, что она дает возможность с помощью одних дуг, получающихся от пересечений больших кругов на поверхности сферы, находить величины других дуг.

В книге I мы показали способ, которым можно пользоваться для нахождения по пяти известным членам составного отношения 6-го члена, когда он неизвестен. Эти же самые правила являются надежным средством и здесь. Часто случается, что две из шести дуг, входящих в состав составного отношения будут неизвестны, но они входят в неявное или явное отношение, т. е. отношение синуса одной дуги к синусу другой выражено через два другие отношения. Тогда правило для нахождения неизвестных является тем правилом, которое мы указали в книге III[1], что делает полный четырехсторонник весьма полезным. Древние геометры часто применяли его с этой целью и пользовались им с уверенностью, как это видно в „Сферике“ Менелая[2] и в

[1] См. книгу III, главу III.

[2] В подлиннике указана арабская транскрипция имени Менелая مانالاوس („Маналаус“).

начале „Алмагеста“ Птолемея. Но многие из более поздних ученых, из боязни запутаться в исследовании различных отношений и их разновидностей, доказывают другие теоремы для того, чтобы заменить полный четырехсторонник и получить пользу, извлекаемую из него, не прибегая к многочисленным случаям составных отношений. Поэтому мы считаем полезным в этом исследовании сказать также о методах, применяющихся позднейшими геометрами, чтобы дополнить все то, что относится к этой науке.

КНИГА ПЯТАЯ

ИЗЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ, ЗАМЕНЯЮЩИХ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИК ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДУГ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ БОЛЬШИХ КРУГОВ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

В этой книге содержится 7 глав

Глава I,

в которой говорится о свойствах углов, образованных при пересечении больших кругов на поверхности сферы

Если два больших круга на поверхности сферы пересекаются в двух противоположных точках, то вокруг каждой из этих точек мы получим четыре угла. Чтобы узнать их величину, мы примем эти точки за полюсы и представим себе на поверхности сферы третий большой круг, пересекающий данные два круга на расстоянии четверти окружности. Этот круг будет находиться на одном и том же расстоянии от обеих точек и являться по отношении к ним экватором[1], как это доказано в теореме XVIII книги I „Сферики" Теодосия.

Два первых круга разделяют этот последний круг на четыре части, каждая из которых является хордой[2] двух из восьми углов, образованных вокруг двух точек пересечения и число тех из 360 частей экватора, которые заключаются в каждой из этих хорд, является мерой их углов. Кроме того, эта хорда представляет собой наибольшее расстояние между сторонами ее углов. Поэтому очевидно, что два рассматриваемых угла равны.

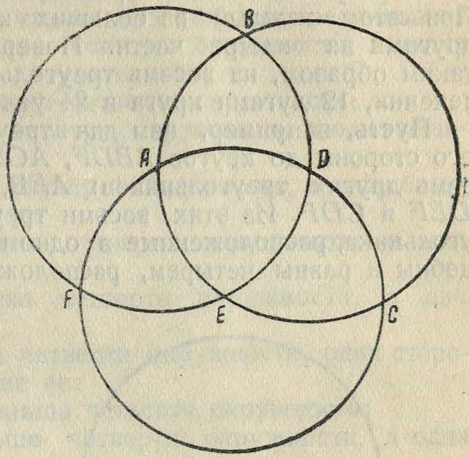
Далее, если два первых больших круга образуют между собой прямые углы, то каждая из соответствующих им дуг

---

[1] Мы переводим словом „экватор" арабское слово منطقة (мантага), дословно—„полоса, пояс".

[2] Здесь слово „хорда угла" употребляется в смысле „сторона сферического треугольника, лежащая против данного угла".

экватора будет состоять из 90 частей. Следовательно, это число измеряет все прямые углы, в то время как острые углы или прямые углы будут выражаться числом частей экватора соответственно меньшим или большим, чем 90. Сумма любых двух смежных углов, острого и тупого, равна полуокружности, а каждый из двух остальных углов равен своему вертикальному, острый угол—острому, а тупой—тупому.



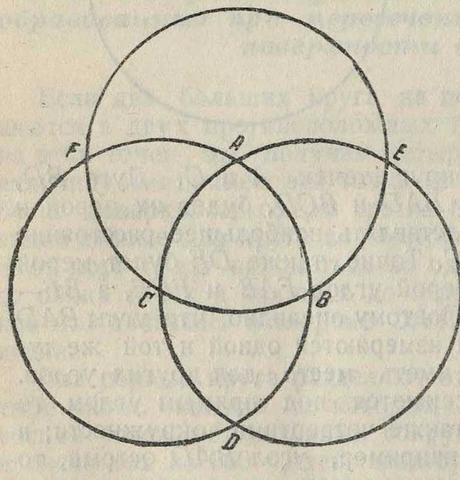
Пусть, например, два круга *ABCE* и *ADCF* пересекаются в точках *A* и *C*. Вокруг точки *A* мы получим 4 угла—*BAD*, *DAE*, *EAF*, *FAB*, а вокруг точки *C*—четыре других—*BCD*, *DCE*, *ECF* *FCB*. Из точек *A* и *C*, как плюсов, раствором циркуля, равным четверти этих двух кругов, опишем круг *BDEF*; этот круг будет их экватором и будет разделен на четыре части *BD*, *DE*, *EF*, *FB*, которые будут хордами углов, образованных вокруг точек *A* и *C*. Дуга *BD*, являющаяся хордой углов *BAD* и *BCD*, будет их мерой и в то же время будет представлять наибольшее расстояние между дугами *ABC* и *ADC*. Точно также *DE* будет мерой углов *DAE* и *DCE*; *EF*—мерой углов *FAE* и *FCE*, а *BF*—мерой углов *BAF* и *BCF*. Поэтому очевидно, что углы *BAD* и *BCD* равны, так как они измеряются одной и той же дугой. То же самое будет иметь место для других углов. Если же два круга пересекаются под прямым углом, то *BD*, *DE*, *EF*, *FB* будут также четвертями окружности; в противном случае, если, например, угол *BAD* острый, то угол *DAE* будет тупым углом и дополнением предыдущего; угол *BAD* будет, кроме того, равен углу *FAE*, так как каждый из них соответствует дополнению дуги *DE* до полуокружности; точно также угол *DAE* будет равен углу *BAF*. Поэтому в случае пересечения двух больших кругов мы получаем всегда четыре равных между собой острых угла и четыре также равных между собой тупых угла, и сумма каждого острого угла с каждым тупым углом равна двум прямым углам.

Глава II,

в которой говорится о разновидностях и свойствах треугольников, образованных при пересечении больших кругов на поверхности сферы

Если три больших круга на поверхности сферы пересекаются таким образом, что они образуют треугольник, то они образуют в то же время семь других треугольников. При этом каждый из больших кругов разделяется двумя другими на четыре части. Поверхность сферы разделена, таким образом, на восемь треугольников с 6 точками пересечения, 12 дугами круга и 24 углами.

Пусть, например, нам дан треугольник ABC. Дополняя его стороны до кругов $ABDF$, $ACDE$ и $BCFE$, мы получим семь других треугольников: AEB, AEF, ACF, BDC, BED, DEF и CDF. Из этих восьми треугольников четыре треугольника, расположенные в одном полушарии, попарно подобны и равны четырем, расположенным в другом полушарии.



Например, треугольник ACF подобен и равен треугольнику EDB, сторона AF равна стороне DB, сторона AC равна стороне ED, сторона CF равна стороне EB; угол FAC равен своему вертикальному углу EAB, а этот последний угол равен своему противоположному углу EDB; точно также угол AFC равен углам ABC и EBD, а угол ACF—углам BCD и BED.

То же самое будет иметь место и для других треугольников, так что стороны и углы четырех треугольников, расположенных в каждом полушарии, будут попарно равны.

Что касается четырех треугольников, расположенных в одном полушарии, то, сравнивая любые два из них, мы найдем, что они имеют по одному равному углу и по одной равной стороне, а их другие углы и стороны являются дополнениями друг для друга.

Так, например, треугольники ABC и CDF имеют равные углы C, являющиеся вертикальными углами, и равные стороны AB и FD, а то время как сторона BC является дополнением FC, а AC—дополнением CD. Угол ABC равен углу AFC, который является дополнением угла CFD, откуда находим, что угол CFD является дополнением угла ABC, и то же самое имеет место для третьих углов. Из этого следует, что достаточно знать только один из этих восьми треугольников, чтобы все они были бы определены.

Далее, в силу того, что каждая сторона треугольника равна, больше или меньше четверти окружности, имеется десять следующих видов треугольников:

1) все три стороны равны четверти окружности;

2) две стороны равны четверти окружности, а одна меньше ее;

3) две стороны равны четверти окружности, а одна больше ее;

4) одна сторона равна четверти окружности, а две меньше ее;

5) одна сторона равна четверти окружности, а две больше ее.

6) одна сторона равна четверти окружности, одна сторона меньше, а одна больше ее;

7) все три стороны меньше четверти окружности;

8) две стороны больше четверти окружности, а одна сторона меньше ее;

9) две стороны меньше четверти окружности, а одна больше ее;

10) все три стороны больше четверти окружности.

Но так как всегда, когда имеет место пересечение трех кругов, имеются два из этих видов треугольников, то из этого следует, что всего имеется пять видов пересечений. В самом деле, предположим, что один из восьми треугольников принадлежит к 7-му виду, т. е. каждая из его трех сторон меньше, чем четверть окружности, в этом случае три треугольника, расположенных в одном и том же полушарии, будут принадлежать к 8-му виду, так как они обязательно должны иметь две стороны больше четверти окружности и одну сторону меньше четверти окружности, так как каждая из сторон рассматриваемого треугольника должна быть равна стороне одного из трех других треугольников, т. е. у последних одна сторона будет меньше четверти окружности, в то время как две других стороны этих треугольников будут дополнениями сторон первого треугольника.

Если бы первый треугольник принадлежал к 8-му виду, т. е. две его стороны были бы больше четверти окружности, а одна сторона—меньше ее, то два из остальных треугольников принадлежали бы к тому же виду, а третий принадлежал бы к 7-му виду, т. е. все его три стороны были бы меньше четверти окружности. Таким образом, мы видим, что два из десяти перечисленных нами видов треугольников связаны друг с другом и соответствуют одному и тому же роду пересечения. То же самое можно сказать о треугольниках 4-го, 5-го и 6-го вида, так как если из четырех треугольников один будет 4-го вида, то второй будет 5-го, а два других—6-го вида; то же относится к треугольникам 9-го и 10-го вида, так как два из четырех треугольников принадлежат к одному, а два—к другому из этих видов.

Только в случае треугольника 1-го вида все четыре треугольника принадлежат к этому виду. Поэтому пять видов пересечений являются следующими:

1-е пересечение содержит треугольники 1-го вида,

2-е пересечение содержит треугольники 2-го и 3-го видов,

3-е пересечение содержит треугольники 4-го, 5-го и 6-го видов,

4-е пересечение содержит треугольники 7-го и 8-го видов,

5-е пересечение содержит треугольники 9-го и 10-го видов.

Точно также можно распределить сферические треугольники по их углам, так как углы могут быть прямыми, острыми и тупыми, на десять следующих видов:

1) все три угла прямые;
2) два угла прямые, один острый;
3) два угла прямые, один тупой;
4) один угол прямой, два острые;
5) один угол прямой, два тупые;
6) один угол прямой, один острый, один тупой;
7) все три угла острые;
8) один угол острый, два тупые;
9) все три угла тупые;
10) один угол прямой, два острые.

Эти десять видов образуются следующими пятью видами пересечений:

1-е пересечение содержит треугольники 1-го вида,

2-е пересечение содержит треугольники 2-го и 3-го видов,

3-е пересечение содержит треугольники 4-го, 5-го и 6-го видов,

4-е пересечение содержит треугольники 7-го, 8-го видов, 5-е пересечение содержит треугольники 9-го и 10-го видов.

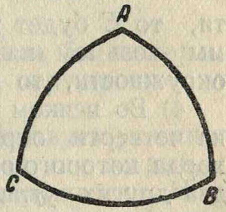
Способ нахождения связи между различными видами треугольников, соответствующих каждому виду пересечения, совершенно аналогичен способу, которым мы пользовались, говоря о видах треугольников по отношению к их сторонам.

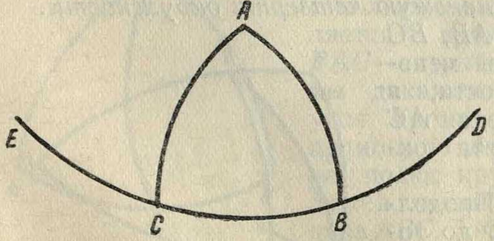
Глава III,

в которой говорится о правилах, относящихся к различным видам треугольников, которые будут изучены вообще и в частности

Мы начнем с изложения того, что относится к первым десяти видам треугольников.

1) Если все стороны треугольника равны четверти окружности, все его углы обязательно прямые. Здесь полюсом каждой стороны является вершина того угла, для которого эта сторона является хордой. Пусть, например, треугольник *ABC* будет таким треугольником. Вершина *A* здесь соединяется равными хордами *BA* и *CA* с точками *C* и *B*; эти хорды равны четверти большого круга. Вершина *A* является полюсом дуги *CB*, как это доказано в предложениях XVII и XVIII книги I „Сферики“ Теодосия. То же имеет место и для остальных углов и сторон. Таким образом, если все стороны треугольника равны четверти окружности, все его углы прямые.

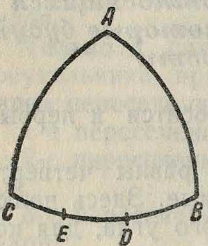




2) Если две стороны треугольника равны четверти окружности, то треугольник будет иметь два прямых угла и один острый угол. Вершина этого острого угла является полюсом своей хорды, а полюсы двух других сторон будут расположены на хорде острого угла вне треугольника.

Пусть треугольник *ABC* будет таким треугольником. Так как каждая из сторон *AB*, *AC* равна четверти окружности, то углы *ABC* и *ACB* будут прямыми, как это доказано в предложении XVI книги I „Сферики“ Теодосия. Но BC меньше четверти окружности, следовательно угол CAB является острым. Если же мы продолжим хорду BC до D и до E так, чтобы CD и BE были бы равны полуокружности, то E будет полюсом AB, а D—полюсом AC.

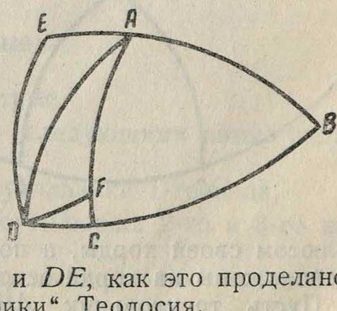
3) Если две стороны треугольника равны четверти окружности, а 3-я сторона его больше четверти окружности, то треугольник будет иметь два прямые угла и один тупой угол. Вершина этого тупого угла является полюсом его хорды, а полюсы двух других сторон находятся на хорде тупого угла внутри треугольника.



Пусть треугольник ABC будет таким треугольником. Так как каждая из сторон AB, AC равна четверти окружности, а BC больше четверти окружности, то A будет полюсом BC, как было сказано выше, а углы B и C будут прямыми; но так как BC больше четверти окружности, то угол A будет тупым. Если мы возьмем на хорде BC дугу BE, равную четверти окружности, то E будет полюсом хорды AB. Точно так же, если мы возьмем на хорде BC дугу CD, равную четверти окружности, то D будет полюсом хорды AC.

4) Во всяком треугольнике, одна сторона которого равна четверти окружности, а две других меньше ее, угол, хорда которого равна четверти окружности, является тупым, два других угла—острые, а все три полюса сторон расположены вне треугольника.

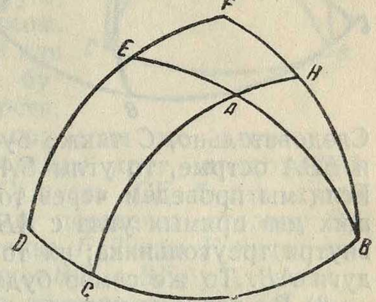
Чтобы объяснить это, приведем следующее предложение. *Всякий угол, прямой или острый, заключенный между сторонами меньшими четверти окружности, будет иметь хорду также меньшую четверти окружности.*



Пусть обе стороны AB, BC данного прямого угла меньше четверти окружности, я утверждаю, что хорда AC также меньше четверти окружности.

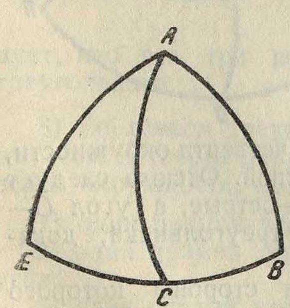
Доказательство. Продолжим стороны BA и BC до точек D и E, так чтобы BD и BE были бы равны четверти окружности, проведем дуги AD и DE, как это проделано в предложении XXI книги 1 „Сферики“ Теодосия.

Тогда, так как D есть полюс стороны BE, то, как показано в предложении XVII той же книги, DA будет четвертью окружности. Если бы AC была четвертью окружности, то A была бы полюсом CD, что невозможно, так как полюсом CD является E, а если бы AC была больше четверти окружности, то отложим на AC дугу AF равную четверти окружности и проведем DF с полюсом в A; тогда угол ADF должен быть прямым; но угол EDB, больший этого угла, также прямой, что является противоречием; следовательно AC меньше четверти окружности.



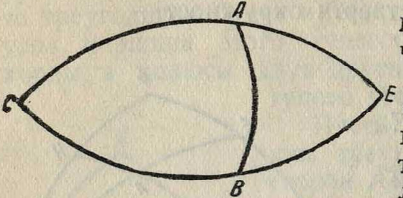
Предположим теперь, что угол ABC является острым. Продолжим дуги AB и BC до E и D так, чтобы BD и BE были равны четверти окружности и проведем дугу FB, так что все стороны равны четверти окружности. Продолжим CA до H; если эта точка попадает на одну из сторон BF, FD, то тогда CH меньше четверти окружности и CA тем более будет меньше четверти окружности; если же H попала бы на вершину F, то тогда CH была бы четвертью окружности и CA была меньше четверти окружности, что и требовалось доказать.

Пусть теперь треугольник ABC соответствует указанному выше условию; если угол C—прямой или острый, то дуга AB должна быть меньше четверти окружности. Но по предположению AB равна четверти окружности. Поэтому угол C должен быть тупым. Дополним BC до дуги BE, равной четверти окружности. Проведем дугу EA с полюсом в B, тогда угол BAE является прямым и, следовательно BAC—острый угол. Таким образом мы докажем, что B также острый угол. Кроме того, так как угол BAE прямой, то AE должна проходить через полюс круга AB, который расположен, таким образом, вне треугольника ABC. Точно так же дуга большого круга, проходящая через полюс круга BC, должна пройти через точку B, то полюс будет расположен вне треугольника, так как угол B острый. Точно так же полюс дуги CA будет расположен вне треугольника.



5) Во всяком треугольнике, у которого одна сторона равна четверти окружности, а две других стороны больше четверти окружности—все углы тупые, а все три полюса будут расположены внутри треугольника.

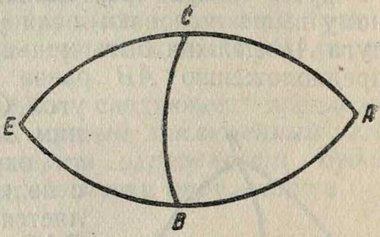
Пусть в треугольнике ABC AB будет равна четверти, а AC и BC больше четверти окружности.



Продолжим AC и BC до их пересечения в E. В полученном треугольнике ABE сторона AB равна четверти окружности, а AE и BE меньше четверти окружности. По только что доказанному предложению угол E будет тупым. Следовательно, C также будет тупым, и так как углы EAB и EBA острые, то углы CAB и CBA также будут тупыми. Если мы проведем через точки A и B две дуги, образующих два прямых угла с AB, то эти две дуги пересекутся внутри треугольника; их точка пересечения будет полюсом дуги AB. То же самое будет для двух других полюсов.

6) Во всяком треугольнике, у которого одна сторона равна четверти окружности, одна сторона меньше и одна сторона больше четверти окружности, угол, хордой которого является большая сторона, тупой, два других угла острые, а все три полюса расположены вне треугольника.

Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше четверти окружности, AC равна четверти окружности, а CB меньше окружности.

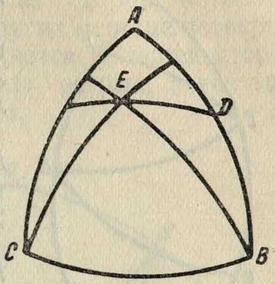


Продолжим стороны AC и AB до их пересечения в E. В полученном треугольнике BCE две стороны меньше четверти окружности, одна сторона равна четверти окружности, два угла C и E—острые, а угол B—тупой. Отсюда следует что в треугольнике ACB углы A и B—острые, а угол C—тупой. То, что полюсы находятся вне треугольника, доказывается так же, как в 4-м случае.

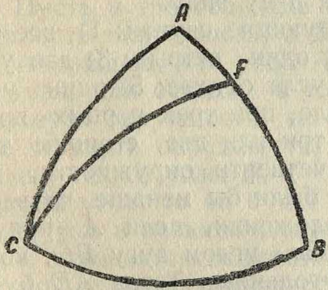
7) Во всяком треугольнике, все три стороны которого меньше четверти окружности, два угла острые, 3-й угол может быть прямым, тупым или острым, а все три полюса расположены вне треугольника.

Если этот треугольник не имеет двух острых углов, то он будет иметь два прямых или два тупых угла, или же один прямой и один тупой угол. Но все эти предложения невозможны.

Если два угла треугольника, например B и C, были бы прямыми, то A была бы полюсом BC и AB и AC были бы равны четверти окружности, что противоречит предположению; если два угла, например B и C, были бы тупыми, то проведем через точки B и C дуги больших кругов BE и CE, пересекающиеся в полосе E дуги BC.



Проведем дугу большого круга, для которого B является полюсом. Этот круг пересечет сторону AB или сторону AC в точке D, и BD будет равен четверти окружности, что противоречит предположению; если же один угол B прямой, угол C тупой, то проведем круг, проходящий через полюс BC и через точку C; пусть CE будет дугой этого круга; последний обязательно пересечет сторону BA в точке F. Тогда F будет полюсом BC, а BF будет четвертью окружности, но BF должно быть меньше BA, что противоречит предположению.



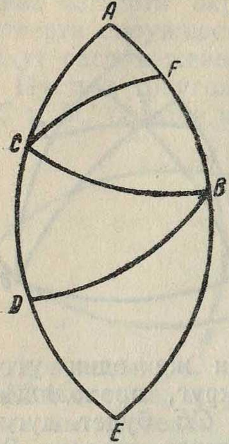
Итак, два угла этого треугольника обязательно являются острыми; третий же угол может быть острым, прямым или тупым, так как любой из этих трех углов может иметь хорду, меньшую четверти окружности. Из сказанного следует, что все три полюса обязательно расположены вне треугольника.

8) Во всяком треугольнике, две стороны которого больше, чем четверть окружности, а 3-я сторона меньше четверти окружности, могут быть следующие углы:

1) один прямой угол и два тупых угла;
2) один прямой угол, один острый угол, один тупой угол;
3) один острый угол и два тупых угла;
4) один тупой угол и два острых угла;
5) все три тупых угла;
остальные же пять сочетаний невозможны.

Пусть в треугольнике ABC стороны AB, AC больше четверти окружности, BC меньше четверти окружности;

E—точка пересечения продолжений AB, AC. В полученном треугольнике BCE все три стороны будут меньше четверти окружности.



1) Если E—прямой угол, а углы EBC и BCE острые углы, то углы ABC и ACB тупые и треугольник ABC принадлежит к первому виду;

2) если один из двух углов EBC, BCE—прямой, а два других—острые, то треугольник ABC принадлежит ко 2-му виду;

3) если все три угла треугольника BCE острые, то треугольник ABC принадлежит к 3-му виду;

4) если один из двух углов ECB, EBC тупой, а два других угла острые, то треугольник ABC принадлежит к 4-му виду;

5) если угол E тупой, а два других угла—острые, то треугольник ABC принадлежит к 5-му виду.

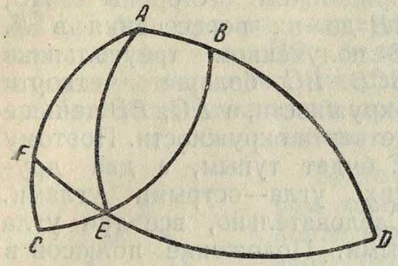
Невозможными являются следующие случаи: 1) все три угла прямые; 2) два угла тупые, один острый; 3) два угла прямые, один тупой; 4) все три угла острые; 5) один угол прямой, два острых. В самом деле, при трех первых предположениях необходимо, чтобы три или две стороны треугольника ABC были бы равны четверти окружности, при 4-м предположении все стороны были бы меньше четверти окружности, при 5-м же предположении, если A—прямой угол, проведем через B под прямым углом дугу BD, которая пересечет AC в D, вне треугольника. Тогда AD будет равна четверти окружности, а AC больше четверти окружности, что противоречит предположению. Если же B—прямой угол, то возьмем на BA дугу BF, равную четверти окружности, и проведем дугу большого круга CF; F будет полюсом BC и угол FCB будет прямым, а угол ACF—острый, что противоречит предположению. Следовательно, все пять указанных предположений невозможны.

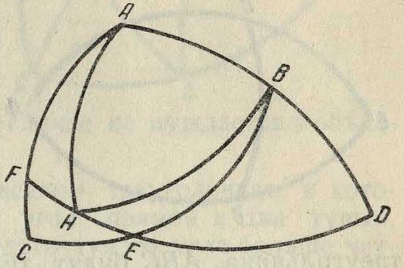
В 1-м случае полюс каждой из сторон прямого угла находится на другой стороне, а полюс хорды прямого угла расположен внутри треугольника;

Во 2-м случае полюс хорды острого угла расположен на хорде тупого угла, внутри треугольника; полюс хорды тупого угла расположен на хорде острого угла вне треугольника и то же самое будет иметь место для полюса 3-й стороны.

В 5-м случае полюс хорды острого угла будет расположен внутри треугольника, а полюс двух других сторон—вне треугольника, в чем читатель может легко убедиться самостоятельно[1].

9) Во всяком треугольнике, одна из сторон которого больше четверти окружности, а две других меньше четверти окружности, угол, хорда которого является большей стороной, является тупым, два других угла острые, а все три полюса расположены вне треугольника.





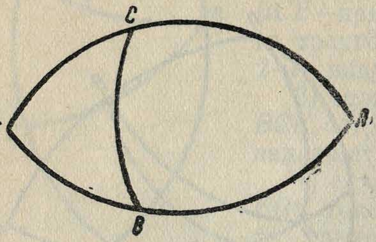
Пусть в треугольнике ABC стороны AB, AC меньше четверти окружности, а BC—больше четверти окружности. Я утверждаю, что угол A тупой, так как если он был бы прямым или острым, в то время как его стороны меньше четверти окружности, то сторона BC также была бы меньше четверти окружности, что противоречит предположению. Точно также углы B, C будут острыми, так как если B не острый угол, то он будет прямым или тупым; если он прямой угол и возьмем дугу BE равную четверти окружности, то E становится полюсом BA; продолжим AB до дуги AD, равной четверти окружности, и проведем дуги AE и AD, которые будут равны четверти окружности. Если мы продолжим ED до F, то AF будет равна четверти окружности, что противоречит предположению, согласно которому AC меньше четверти окружности. Если же мы предположим, что B тупой угол, то, так как угол A также тупой, проведем из полюса AB две дуги большого круга, проходящие через A и B; полюс дуги AB будет находится внутри треугольника в точке H. Продолжим AB до дуги AD, равной четверти окружности, проведем дугу DH и продолжим ее до F. Тогда AF должна быть равна четверти окружности, что противоречит предположению о том, что дуга AC, большая ее, меньше четверти окружности. Таким образом, угол B не может быть тупым.

[1] Следует добавить, что в четвертом случае (треугольник AFC чертежа) все три полюса находятся вне треугольника, а в пятом случае (треугольник ABD чертежа) все три полюса находятся внутри треугольника.

Точно таким образом можно доказать, что угол C также не может быть ни прямым, ни тупым.

Из сказанного нами положение полюсов должно быть ясным.

10) Во всяком треугольнике, каждая из сторон которого больше четверти окружности, все углы тупые, а все три полюса расположены внутри треугольника.



Пусть дан треугольник ABC. Продолжим стороны AC, AB до их пересечения в E. В полученном треугольнике BCE BC больше четверти окружности, а EC, EB меньше четверти окружности. Поэтому E будет тупым, а два других угла—острыми углами. Следовательно, все три угла треугольника ABC будут тупыми. Положение полюсов в этом случае очевидно.

Так как исследование десяти видов сферических треугольников по отношению к их сторонам, таким образом, исчерпано, то теперь исследуем перечисленные нами выше десять случаев этих треугольников по отношению к их углам.

1) Во всяком треугольнике, у которого три угла прямые, все три стороны равны четверти окружности и вершина каждого из трех углов является полюсом его хорды, как мы это уже доказали.

Такой треугольник представляет собой восьмую часть поверхности сферы.

2) Во всяком треугольнике, в котором два угла прямые и один угол острый, стороны острого угла равны четверти, а хорда острого угла меньше четверти окружности. Вершина острого угла является полюсом его хорды, а полюсы его сторон расположены на этой хорде вне треугольника.

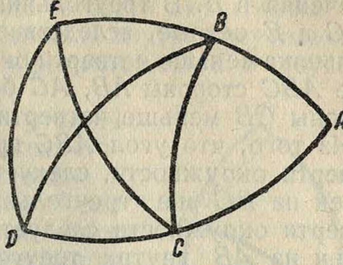
3) Во всяком треугольнике, в котором один угол тупой, а два—прямые, стороны тупого угла равны четверти окружности, а хорда тупого угла больше четверти окружности. Вершина тупого угла является полюсом его хорды, а полюсы его сторон расположены на этой хорде внутри треугольника.

Эти три случая были уже рассмотрены нами.

4) Во всяком треугольнике, в котором один угол прямой и два угла острых, все стороны меньше четверти окружности, а все три полюса расположены вне треугольника. Полюс каждой стороны прямого угла расположен на другой стороне этого же угла.

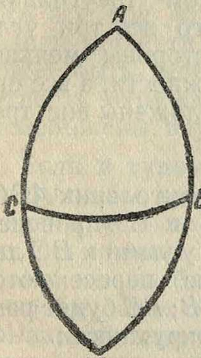
Пусть в треугольнике ABC угол A—прямой, а углы B

и C—острые. Если мы проведем из C дугу большого круга под прямым углом к AC, то она пересечет AB в E, полюсе AC; следовательно, AE будет равна четверти окружности и AB меньше четверти окружности. Точно также докажем, что AC меньше четверти окружности.



Но если угол A прямой, а AB и AC меньше четверти окружности, то BC будет меньше четверти окружности.

Положение полюсов в этом случае не нуждается в объяснении.

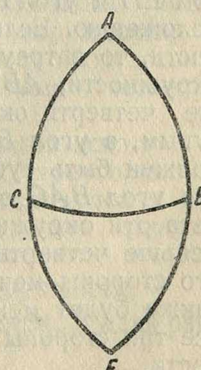


5) Во всяком треугольнике, в котором один угол прямой и два тупых, хорда каждого тупого угла больше четверти окружности, хорда прямого угла меньше четверти окружности, полюс каждой стороны прямого угла расположен на другой стороне этого угла, а полюс его хорды расположен внутри треугольника.

Пусть в треугольнике ABC угол A прямой, а углы B, C тупые. Продолжим AB, AC до их пересечения в E. В треугольнике BEC один угол прямой и два—острые; все стороны этого треугольника меньше четверти окружности. Поэтому в треугольнике ABC каждая из сторон AB, AC больше четверти окружности, а сторона BC меньше четверти окружности.

Положение полюсов ясно.

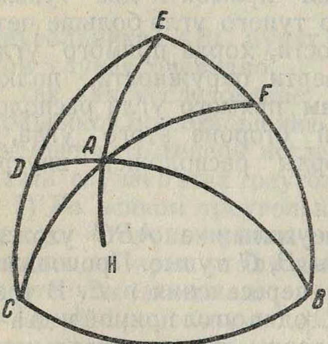
6) Во всяком треугольнике, у которого один угол прямой, один угол тупой и один угол острый, хорда острого угла меньше четверти окружности, остальные две стороны больше четверти окружности, полюс хорды острого угла расположен на хорде тупого угла внутри треугольника, полюс хорды тупого угла расположен на хорде острого угла вне треугольника, а полюс хорды прямого угла также расположен вне треугольника.



Пусть в треугольнике ABC угол A будет острый, угол B—прямой, а угол C—тупой. Продолжим AC, AB до их пересечения в E. В треугольнике BCE угол B прямой, а углы C и E острые, вследствие чего все стороны этого треугольника меньше четверти окружности. Поэтому в треугольнике ABC стороны AB, AC больше четверти окружности, а стороны CB меньше четверти окружности.

Из того, что угол ABC прямой, а сторона BC меньше четверти окружности, следует, что полюс AB будет расположен на BC вне треугольника; из того, что AB больше четверти окружности следует, что полюс BC будет расположен на AB внутри треугольника; наконец, из того, что угол A острый, следует, что полюс CA расположен вне треугольника.

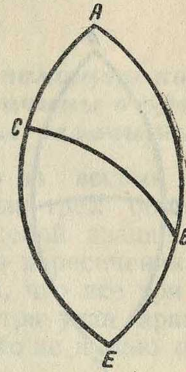
7) Во всяком треугольнике, у которого все три угла острые, все стороны меньше четверти окружности, а все его полюсы расположены вне треугольника.



Пусть дан треугольник ABC. Из точек B и C проведем под прямыми углами к BC две дуги, которые пересекаются в E, полюсе CB; BE будет равна четверти окружности. Через E и A проведем дугу большого круга EAH. Если BA была бы равна четверти окружности, то B была бы полюсом EH и угол BAH был бы прямым, что противоречит предположению. Если же BA была бы больше четверти окружности, то в треугольнике BAE, так как BE равна четверти окружности, AB больше четверти окружности, а EA меньше четверти окружности, угол BEA должен был бы быть тупым, а угол BAE—острым и, следовательно, угол BAH должен быть тупым, что противоречит предположению о том, что угол BAC острый. Поэтому BA должна быть меньше четверти окружности. Точно также доказывается, что AC меньше четверти окружности. Но так как угол A острый и его стороны меньше четверти окружности, то его хорда BC также будет меньше четверти окружности. Таким образом, все три стороны этого треугольника меньше четверти окружности.

Положение полюсов очевидно.

8) Во всяком треугольнике, у которого один угол острый и два тупые, хорды тупых углов больше четверти окружности, хорда острого угла меньше четверти окружности, полюс этой последней хорды расположен внутри треугольника, а полюсы двух остальных сторон расположены вне треугольника.

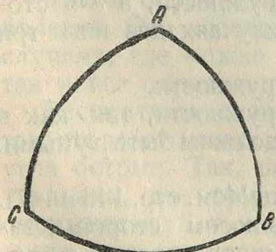


Пусть в треугольнике ABC угол A острый, и B, C—тупые. Продолжим стороны AB и AC до их пересечения в E. Полученный треугольник будет остроугольным, и все стороны этого треугольника будут меньше четверти окружности.

Положение полюсов очевидно.

9) Во всяком треугольнике, у которого все три угла тупые, две стороны больше четверти окружности, 3-я сторона может быть равна, меньше или больше четверти окружности, а все три полюса расположены внутри треугольника.

Если в тупоугольном треугольнике ABC все три стороны были бы меньше четверти окружности; или если две стороны меньше четверти окружности, а третья равна, больше или меньше четверти окружности; или если одна сторона была бы больше четверти окружности, вторая сторона была бы равна четверти окружности, а третья сторона— меньше четверти окружности, то треугольник обязательно имел бы два острых угла. Если же две из его сторон были бы равны четверти окружности, то треугольник обязательно имел бы два прямых угла; все эти предположения недопустимы. Поэтому две стороны треугольника должны быть больше четверти окружности, а третья сторона может быть равна, меньше или больше четверти окружности.



Положение полюсов ясно.

10) Во всяком треугольнике, у которого один угол тупой и два угла острых, могут быть следующие стороны:

1) все три стороны меньше четверти окружности,

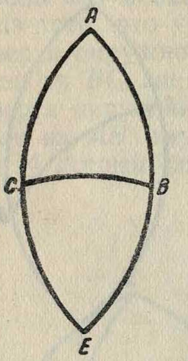
2) две стороны меньше четверти окружности, а одна равна ей,

3) две стороны меньше четверти, а одна больше ее,

4) две стороны больше четверти окружности, а одна меньше ее,

5) одна сторона равна четверти окружности, одна больше, а одна меньше ее.

Остальные же пять случаев невозможны; во всех этих случаях все три полюса расположены вне треугольника.



Пусть в треугольнике ABC угол A тупой, а углы B и C острые. Продолжим AB и AC до пересечения в E. В треугольнике CBE все три угла будут тупые. Если обе стороны BE, CE будут больше четверти окружности, то сторона BC может быть больше, равна или меньше четверти окружности. При этом если BC меньше четверти окружности, то треугольник ABC будет принадлежать к 1-му виду, если BC равна четверти окружности, то треугольник ABC будет принадлежать ко 2-му случаю, если BC больше четверти окружности, то треугольник ABC будет принадлежать к 3-му виду.

Если одна из двух сторон BE, CE меньше четверти окружности, то треугольник ABC будет принадлежать к 4-му виду.

Если одна из двух сторон BE, CE равна четверти окружности, то треугольник ABC будет принадлежать к 5-му виду.

Невозможны следующие случаи:

1) все стороны равны четверти окружности,

2) две стороны равны четверти окружности, а 3-я сторона меньше ее,

3) две стороны равны четверти окружности, а 3-я сторона больше ее, так как в этих трех случаях два или три угла должны быть прямыми,

4) все стороны больше четверти окружности,

5) две стороны больше четверти окружности, так как в этих двух последних случаях все углы должны быть тупыми.

Положение полюсов ясно.

Все эти случаи мы объединили в таблице[1] (см. стр. 146 и 147).

По поводу полюсов заметим, что полюсом стороны, заключенной между двумя прямыми углами, является та точка, хордой которой является эта сторона; полюс стороны, заключенной между прямым и непрямым углами, лежит на другой стороне прямого угла, причем если эта последняя сторона больше четверти окружности, полюс расположен

[1] В этой таблице исправлены ошибки, имевшие место в подлиннике.

внутри треугольника, а если эта сторона меньше четверти окружности, полюс расположен вне треугольника; если сторона заключена между двумя тупыми углами, ее полюс расположен внутри треугольника; если сторона заключена между двумя острыми углами или между острым и произвольным углом, ее полюс расположен вне треугольника.

Глава VI,

в которой говорится о способе, с помощью которого можно найти неизвестные величины в сферическом треугольнике по известным величинам

Выше мы показали, что знание одного из восьми треугольников, образованных при пересечении трех больших кругов на поверхности сферы, влечет за собой знание всех остальных и что всего имеется пять видов пересечения.

Первый вид пересечения состоит в том, что все три стороны равны четверти окружности и все три угла прямые. Здесь все стороны и углы известны и ничего не нужно определять.

Второй вид пересечения состоит в том, что две стороны каждого из четырех треугольников равны четверти окружности и одна сторона меньше четверти окружности, два угла этих треугольников прямые, а один угол—острый, две стороны каждого из других четырех треугольников равны четверти окружности и одна сторона больше четверти окружности, два угла этих треугольников прямые и один угол тупой.

В этом случае неизвестные стороны и угол не связаны с известными величинами: если эта неизвестная величина дана, то ничего не нужно определять, а если она не дана, то способа для ее нахождения не имеется.

Таким образом, в этом случае всякое исследование бесполезно. Это исследование полезно только в остальных трех случаях, где можно определить как данный треугольник, так и все определенные им треугольники.

Рассмотрим сначала треугольник, у которого две или три стороны меньше четверти окружности и два или три угла острые. Так, рассматривая стороны, мы получим треугольник, две стороны которого будут меньше четверти окружности, 3-я меньше, больше или равна четверти окружности, что дает три случая. Точно также, рассматривая углы, мы получим треугольник, два угла которого будут острые, а 3-й острый, прямой или тупой, что также дает три случая. Но три последних случая являются следствиями трех первых, хотя обратное не верно, так как треугольник, две стороны которого меньше четверти окружности, а 3-я равна четверти окружности, и треугольник, две стороны которого

	10 видов сферических треугольников по отношению к их сторонам / 10 видов сферических треугольников по отношению к их углам	1	2	3	4
		3 стороны равны четверти окружности	2 стороны равны четверти окружности, 1 меньше ее	2 стороны равны четверти окружности, 1 больше ее	1 сторона равна четверти оиружности, 2 меньше ее
1	3 угла прямых	Обязательно Обя-за-тель-но	Н	е	в
2	2 угла прямых 1 угол острый	Невозможно	Обязательно Обя-за-тель-но	Н	е
3	2 угла прямых 1 угол тупой	Невоз	можно	Обязательно Обя-за-тель-но	Н
4	1 угол прямой 2 угла острых	Не	во	зм	о
5	1 угол прямой 2 угла тупых	Не	во	зм	о
6	1 угол прямой 1 угол тупой 1 угол острый	Не	в	о	з
7	3 угла острых	Не	во	зм	о
8	1 угол острый 2 угла тупых	Не	в	о	з
9	3 угла тупых	Нев	озм	ож	но
10	2 угла острых 1 угол тупой	Нев	озмо	жно	Возможно Обя-за-тель-но

5	6	7	8	9	10
1 сторона равна четверти окружности, 2 больше ее	1 сторона равна четверти окружности, 1 больше ее, 1 меньше ее	3 стороны меньше четверти окружности	2 стороны больше четверти окружности, 1 меньше ее	2 стороны меньше четверти окружности, 1 больше ее	3 стороны больше четверти окружности
о	з м	о	ж	н	о
в	о з	м	о	ж	н о
е	в о	з	м о	ж	н о
ж	н о	Обязательно Воз-мож-но	Н е в	о з м	о ж н о
ж	н	о	Обязательно Воз-мож-но	Н е в о з	м о ж н о
м	о ж	н о	Обязательно Воз-мож-но	Н е в о з	м о ж н о
ж	н о	Обязательно Воз-мож-но	Н е в	о з м о	ж н о
м	о ж	н о	Обязательно Воз-можно	Н е в о з	м о ж н о
Возможно Обя-за-тель-но	Н е в о з	м о ж н о	Возможно Воз-можно	Невозможно	Возможно Обя-за-тель-но
Невоз-можно	Возможно Обя-за-тель-но	Возможно Воз-можно	Возможно Воз-можно	Возможно Обя-за-тель-но	Невозможно

меньше четверти окружности, а 3-я больше четверти окружности, обязательно будут иметь два острых угла и один тупой, а треугольник, у которого три стороны меньше четверти окружности, будет иметь два острых угла, а 3-й угол может быть прямым, тупым или острым.

Точно также треугольник, у которого все углы острые или два острых и один прямой, обязательно будут иметь стороны меньше четверти окружности, треугольник, у которого все углы острые или два острых и один прямой, обязательно будет иметь стороны, меньше четверти окружности, треугольник, у которого два острые угла и один тупой, по отношению к своим сторонам, может принадлежать или к трем указанным видам или в двум другим видам: у такого треугольника две стороны могут быть больше четверти окружности, а 3-я меньше ее или же одна сторона может быть равна четверти окружности, одна больше и одна меньше ее.

В каждом треугольнике приходится рассматривать три угла и три стороны—всего шесть величин; и если нам известны три каких-либо из этих шести величин, то мы узнаем три других по обычному способу четырех пропорциональных. В треугольнике, у которого все углы прямые, прямые углы заменяют три известных величины и нет надобности знать что либо еще, но в других треугольниках необходимо знать три величины.

Теперь нам остается показать различные виды пропорций. Новейшие ученые следуют в этом отношении двум правилам. Одно из этих правил связано с теоремой, называемой т е о р е м о й с и н у с о в[1], заменяющей теорию полного четырехсторонника при нахождении неизвестных дуг и избавляющей от необходимости прибегать к различению случаев, необходимому в этой теории, и к составным отношениям. Другое из этих правил связано с теоремой, называемой т е о р е м о й т а н г е н с о в[2], которая в большинстве исследований также заменяет теорию полного четырехсторонника и избавляет от всего того, от чего избавляет теорема синусов. Эта вторая теорема доставляет иногда на практике меньше трудностей, чем теорема синусов, но бывает и наоборот. Все это будет понятно, когда мы разъясним эти теоремы, следуя правилам, установленным крупнейшими людьми этой науки.

---

[1] Мы переводим обычным в русской математической литературе выражением „теорема синусов" образное арабское выражение الشكل المغنى (аш-шаклул мугни), дословно—„теорема, делающая излишней" (теорию полного четырехсторонника.)

[2] Мы переводим обычным в русской математической литературе выражением „теорема тангенсов" арабское выражение الشكل الظلى (аш-шаклул зилли) дословно „теневая фигура" (см. сноску на стр. 168).

Глава V,

в которой говорится о теореме синусов и ее различных видах

Эта теорема состоит в том, что *отношения синусов сторон треугольников, образованных на поверхности сферы пересечением дуг больших кругов, равны отношениям синусов углов, имеющих эти стороны своими хордами.*

Обычно сначала доказывают эту теорему для прямоугольного треугольника. К этой цели идут различными путями, которые все изложены в книге нашего великого учителя и ученого Абу Рейхан Бируни[1], озаглавленной „Ключ к познанию фигур на поверхности сферы“.

Так как эти пути сильно отличаются друг от друга, я избрал тот путь, которой кажется мне наиболее убедительным, чтобы настоящий трактат был возможно более кратким и наглядным. Таким путем является путь Эмира Абу Насра Али ибн Ирака[2]. По мнению Абу Рейхана, ему первому удалось найти путь, применимый ко всем случаям, хотя два других уважаемых ученых, Абул Вафа Мухаммед ибн Мухаммед Бузджани[3] и Абу Махмуд Хамид ибн Хазар Ходженди[4] оспаривают у него приоритет по этому вопросу.

Абу Наср снабжает свое изложение предварительным предложением, которое, как бы ни было полезно все же не является необходимым.

Приведем это предварительно предложение.

Предварительное предложение

Если две плоскости пересекаются под углом неравным прямому углу и из точки одной из эти плоскостей мы опустим перпендикуляры на линии пересечения этих плоскостей и на другую плоскость, прямая, соединяющая основание этих перпендикуляров, составляет прямой угол с линией пересечения плоскостей[5].

---

[1] См. сноску 1 на стр. 85.

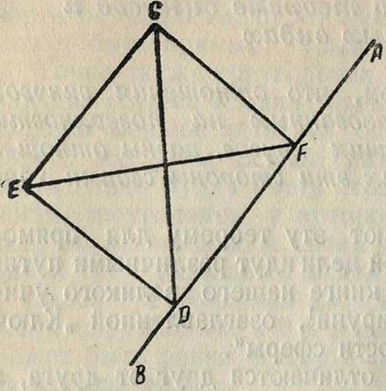
[2] См. сноску 1 на стр. 94.

[3] Абул Вафа Мухаммед ибн Мухаммед Бузджани (ابوالوفا محمد ابن محمد البوزجانى) математик X века, родился в 940 г. в Хорасане, умер в 998 г. в Багдаде.

[4] Абу Махмуд Хамид ибн Хазар Ходженди (ابومحمود حميد ابن الخضر الخجندى)— хорезмский (узбекский) математик X века.

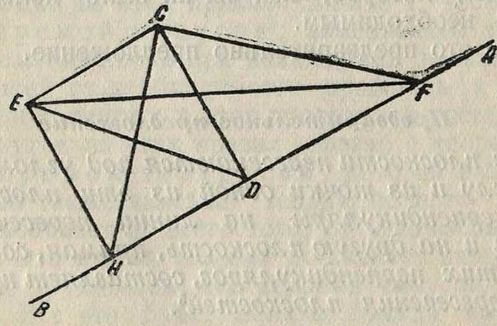
[5] Это предложение в настоящее время, известно под названием „теоремы о трех перпендикулярах“.

Пусть AB—линия пересечения двух плоскостей, пересекающихся под углом, не равным прямому углу. Пусть C—точка на одной из этих плоскостей.



Опустим перпендикуляр CE на другую плоскость и перпендикуляр CD на линию пересечения. Проведем линию ED; я утверждаю, что ED является перпендикуляром к AB.

Доказательство. Возьмем на AB произвольную точку F и проведем линии CF и EF. Так как CE—перпендикуляр к плоскости, в которой находится точка E, и так как EF, ED находятся в этой плоскости, то углы CED, CEF прямые. Угол CDF также прямой. Таким образом, сторона CF является хордой двух прямых углов CEF, CDF и ее квадрат будет равен сумме квадратов CE и EF, а также сумме квадратов CD и DF. Кроме того $CD^2 = CE^2 + ED^2$. Следовательно $CF^2 = CD^2 + DF^2 = CE^2 + ED^2 + DF^2$. Но $CF^2 = CE^2 + EF^2$. Следовательно, $CE^2 + EF^2 = CE^2 + DE^2 + DF^2$, откуда, вычитая из обоих частей CE^2, получаем $EF^2 = ED^2 + DF^2$, а это доказывает, что ED является перпендикуляром к AB, что и требовалось доказать.



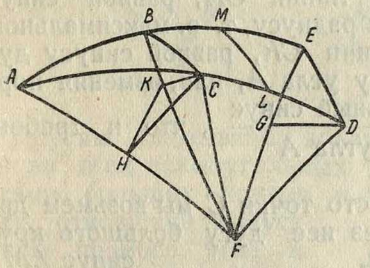
Другое доказательство Абу Рейхана. Отложим на линии DB отрезок DH равный DF; проведем линии CH, EH. Треугольники CDH и CDF равны, так как стороны HD и DF равны, сторона CD—общая, а углы CDH и CDF прямые. Отсюда следует, что линия CH равна CF. Треугольники CEF и CEH также равны, так как стороны FC и CH равны, сторона EC—общая, углы CEH и CEF прямые. Отсюда следует, что линия EH равна EF. Далее, в треугольниках EDH и DEF стороны EH и EF равны, также стороны DH и DF равны, а сторона ED—общая, откуда следует, что эти два треугольника равны и угол EDH равен углу EDF. Поэтому каждый из этих углов—прямой и ED является перпендикуляром к AB, что и требовалось доказать.

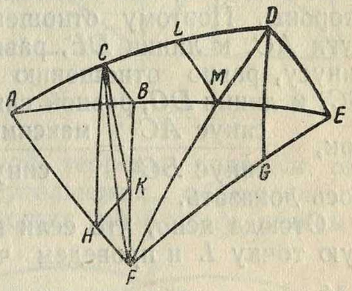
Установив это, переходим к изложению самой теоремы.

О теореме синусов

Рассмотрим треугольник ABC, образованный тремя дугами больших кругов, в котором угол B—прямой.

Я утверждаю, что отношение синуса стороны AC, являющейся стороной прямого угла, к синусу стороны BC, являющейся хордой угла A, равно отношению максимального синуса, т. е. радиуса к синусу угла A.





Доказательство. Продолжим дуги AC, AB до точек E, D, так что дуги AE, AD равны четверти окружности. Через точки D, E проведем дугу большого круга, которая будет измерять угол A. Пусть F будет центр сферы; проведем радиусы FA, FB, FC, FD, FE. FD будет перпендикуляром к AF, так как AD равна четверти окружности; FA будет линией пересечения двух плоскостей кругов AD, AE. Из точки C проведем перпендикуляр CH к AF; так как этот перпендикуляр находится в плоскости круга ACD, то он бддет синусом дуги AC, и так как CH, DF находятся в одной и той же плоскости и являются перпендикулярами к AF, они будут параллельны.

Из точек CD опустим перпендикуляры GK и DC к радиусам BF и EF, которые находятся, соответственно в плоскостях BF и ED. Радиус BF является линией пересечения плоскостей кругом BC и EA, а радиус EP является линией пересечения плоскости кругов DE и AE. Поэтому линии CK и DG будут перпендикулярным к плоскости круга AE, так как DE, CB являются двумя плоскостями, перпендикулярными к плоскости AE, как это показано в „Началах" Евклида. Поэтому линия DG равна синусу дуги DE, которая измеряет угол A, а линия CK равна синусу дуги BC.

Проведем теперь линию KH; эта линия будет перпендикуляром к AF, как это следует из нашего предварительного предложения.

В треугольниках CKH, DCF стороны CK и DG будут параллельны, как перпендикуляры к одной и той же плоскости AE. DF и CH будут параллельны, как перпендикуляры к линии AF[1], вследстве него углы GDF и KCH будут равны, согласно доказанному в „Началах" Евклида. Кроме того, углы DGF и CKF прямые; поэтому треугольники CKH, DGF подобны.

Из предварительного предложения следует также, что линии KH и GF параллельны, и что треугольники GDF, CKH подобны, как имеющие соответственно параллельные стороны. Поэтому отношение линии CH, равной синусу дуги AC, к линии DF, равной радиусу, т. е. максимальному синусу, равно отношению линии CK, равной синусу дуги BC, к линии DG, равной синусу угла A, или, изменяя порядок, $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } BC} = \frac{\text{максимальный синус}}{\text{синус угла } A}$, что и требовалось доказать.

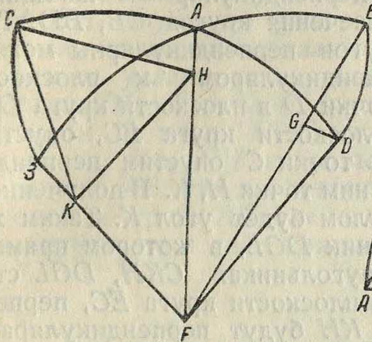
Отсюда ясно, что если вместо точки C мы возьмем другую точку L и проведем через нее дугу большого круга LM, перпендикулярную дуге AE, мы получим, что $\frac{\text{синус } LM}{\text{синус } LA} = \frac{\text{синус } BC}{\text{синус } AC}$.

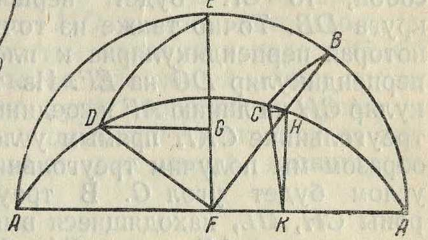
Обычно называют дугу BC склонением дуги AC, являющейся частью дуги круга AD; дуга DE, измеряющая угол A, является склонением дуги AD. По отношению к дуге AB дуга BC является вторым склонением, которое Абу Рейхан называет широтой; таким образом дуга BC является первым склонением по отношению к дуге AC и вторым склонением по отношению к дуге AB или склонением по отношению к дуге AC и широтой по отношению к дуге AB. При таком способе выражения говорят, что *если в двух прямоугольных треугольниках имеется по одному равному углу, то отношение синусов склонений равно отношению синусов их дуг или отношение синуса одного склонения к синусу его дуги равно отношению синуса другого скло-*

[1] Лежащие в одной плоскости, на 1-м чертеже в плоскости большого круга AC, на 2-м чертеже—в плоскости большого круга AB.

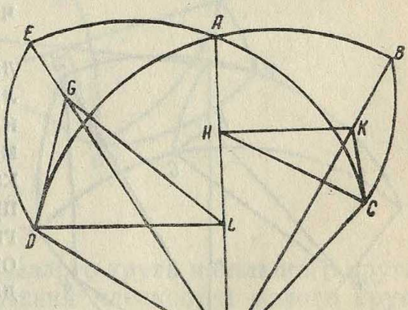
нения к синусу его дуги, так как оба эти отношения равны отношениям синусов равных углов к максимальному синусу.

Если треугольник ABC не налагается на треугольник DAE, но в обоих этих треугольниках углы A равны между собой, а углы B и E—прямые, то для них утверждение теоремы остается в силе. Это утверждение легко доказывается с помощью следующих построений:





Другим следствием доказанной теоремы является то, что во всех прямоугольных треугольниках, образованных дугами больших кругов и имеющих по одному равному углу, отношение синуса хорды прямого угла к синусу хорды одного из равных углов для одного прямоугольника равно такому же отношению для другого треугольника, так как это отношение всегда равно отношению синуса прямого угла к синусу равного угла.



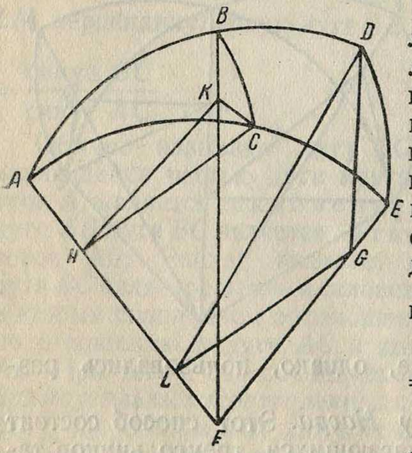
Таково доказательство, данное этой теореме Абу Насром и Абул Вафа, которые, однако, пользовались различными выражениями.

Другой способ Эмира Абу Насра. Этот способ состоит в расположении двух не налагающихся треугольников таким образом, что два прямых угла будут с одной и той же стороны, а равные углы будут вертикальными.

Пусть треугольники ABC и ADE—такие треугольники; стороны BD и CE пересекаются в точке A. Углы E— и B—

является прямым углами. Я утверждаю, что $\frac{\text{синус } BC}{\text{синус } AC} = \frac{\text{синус } DE}{\text{синус } DA}$.

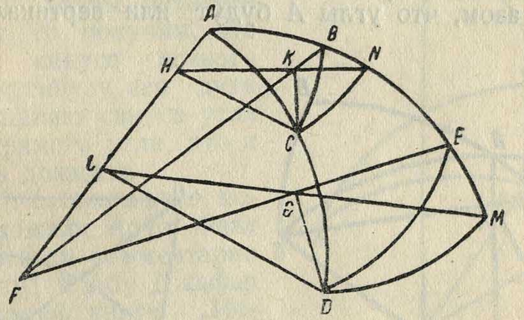
Доказательство. Пусть F центр сферы. Проводим радиусы AF, BF, EF; каждый из этих радиусов является линией пересечения плоскостей двух кругов. Из точки C в плоскости круга BC опустим перпендикуляр CK на линию BF, являющуюся линией пересечения кругов CB, BD. Так как плоскости этих двух кругов перпендикулярны между собой, то CK будет перпендикуляром к плоскости круга DB. Точно также из точки D в плоскости круга DE, которая перпендикулярна к плоскости круга EC, опустим перпендикуляр DG на EF. Из точки C опустим перпендикуляр CH на линию AF и соединим точки H, K. В полученном треугольнике CKH прямым углом будет угол K. Таким же образом мы получим треугольник DGL, в котором прямым углом будет угол G. В треугольниках CKH, DGL стороны CH, GL, находящиеся в плоскости круга EC, перпендикулярны к AF; также DL, KH будут перпендикулярами к AF в плоскости круга BD, поэтому углы L и H будут равны; и так как углы K,G прямые, треугольники DGL HKC будут подобны и $\frac{CK = \text{синус } BC}{CH = \text{синус } AC} = \frac{DG = \text{синус } DE}{DL = \text{синус } AD}$, что и требовалось доказать.



Если же треугольники налагаются друг на друга, то получим следующее построение, к которому может быть применено приведенное выше доказательство. Если теперь мы предположим, что здесь дуги AD, AE равны четверти окружности, то точка L совпадает с точкой F, т. е. с центром, и мы получим, что $\frac{\text{синус } BC}{\text{синус } AC} = \frac{\text{синус } A}{\text{синус прямого угла}}$.

Другое доказательство, также принадлежащее Эмиру Абу Насру. Рассмотрим опять два треугольника ABC, ADE; будем считать угол A общим углом обоих треугольников; углы B и E—прямые углы.

Из точки A дугой, равной AC, опустим дугу CN и дугой, равной AD, опишем дугу DM. Эти две дуги малых кругов будут параллелями и будут соединять дуги больших кругов AD, AE, проходящие через точку A. Поэтому, они будут подобны, как это доказано в „Сферике" Теодосия; их плоскости будут перпендикулярны к плоскостям больших кругов, проходящих через точку A, а их центры будут расположены на оси AF; проведем линии NH, CH в плоскости малого круга CN, H будет центром малого круга NH, CH—двумя его радиусами. Тогда, так как AF—перпендикуляр к плоскости малого круга, то NHA, CHA будут прямыми углами; точно также из точек D и M проведем радиусы DL, ML, малого круга MD, центром которого будет L; затем из точек D, C опустим перпендикуляры DG, CK на линии ML, NH пересечения плоскостей малых кругов и круга AE; эти две линии будут перпендикулярами к плоскости круга AE, так как плоскости малых кругов перпендикулярны к ней; каждая из этих линий является ли-



нией пересечения плоскостей малого круга и большого круга; DG является линией пересечения плоскостей малого круга DM и большого круга DE, CK является линией пересечения плоскостей малого круга CN и большого круга CB. Но так как точки E, G, F находятся в одно и то же время в плоскостях кругов ED, EA, они будут расположены на одной и той же прямой линии EGF, являющейся радиусом сферы; точно также три точки B, K, F будут расположены на прямой линии BKF, также являющейся радиусом сферы; таким образом каждый из перпендикуляров будет одновременно синусом дуги малого круга и дуги большого круга: DG является синусом DM и DE; CK является синусом CN и CB. Но так как отношения синусов подобных дуг различных кругов к их радиусам всегда равны, мы получим, что

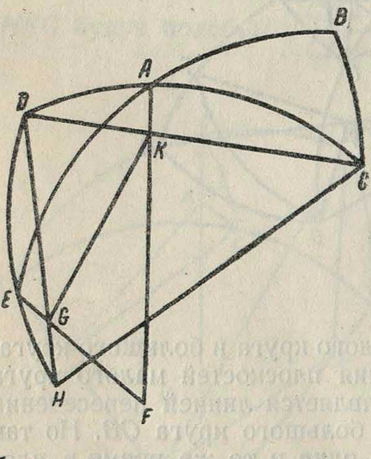
$$\frac{DG = \text{синус } DM}{DL = \text{радиусу малого круга}} = \frac{CK = \text{синус } CN}{CH = \text{радиус малого круга}}.$$

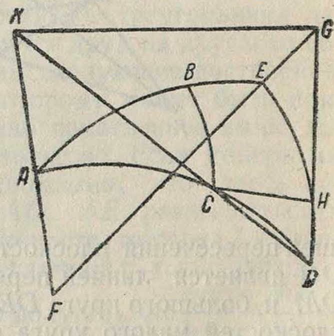
Но $DG =$ синус DE; $DL =$ синус DA; $GK =$ синус CB; $CH =$ синус CA; откуда

$$\frac{\text{синус } DE}{\text{синус } DA} = \frac{\text{синус } CB}{\text{синус } CA},$$

т. е. отношение синуса каждого склонения к синусу его дуги равно синусу другого отношения к синусу его дуги; это же отношение равно отношению синуса угла A к синусу прямого угла, т. е. радиусу,— это последнее равенство мы получим, предполагая, что DE, AD равны четверти окружности, что и требовалось доказать.

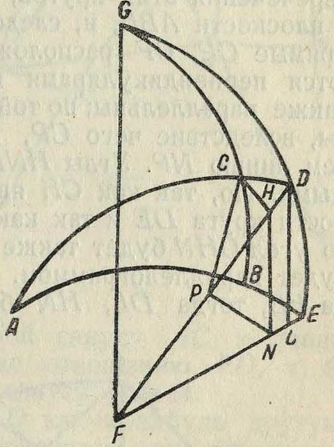
Другое доказательство Абул Вафа Бузджани. Рассмотрим снова два треугольника ABC, AED, у которых углы A равны, а углы B, E—прямые, и расположим их таким образом, что углы A будут или вертикальными или





будут наложены друг на друга. На большей стороне DE возьмем часть EH, равную меньшей стороне BC; проведем прямую линию HC. Так как плоскости кругов HE, CB перпендикулярны к плоскости круга AE, то CH будет параллельна плоскости этого последнего круга и перпендикуляры, опущенные на эту плоскость из C и H, будут равны. Эти перпендикуляры являются синусам равных дуг CB и HE.

Проведем хорды DH, DC и радиусы FE, FA. Так как хорда DH и радиус FE расположены в одной плоскости— плоскости круга DE, то, если дуга DE будет больше четверти окружности, они пересекутся в точке G. Точно также хорда DC и радиус FA, которые расположены в плоскости круга DA, пересекутся в K. Проведем прямую линию GK, которая является линией пересечения плоскостей DCH и EB. Две линии HC, GK, расположенные в одной плоскости, не пересекаются, следовательно они будут параллельны. Но $\frac{DG}{GH}=\frac{DK}{KC}$. А, как было доказано в предварительном предложении к теории сферического полного четырехсторонника, $\frac{DG}{GH}=\frac{\text{синус } DE}{\text{синус } EH=\text{синус } BC}$ и $\frac{DK}{KC}=\frac{\text{синус } DA}{\text{синус } AC}$, откуда $\frac{\text{синус } DE}{\text{синус } BC}=\frac{\text{синус } DA}{\text{синус } AC}$, т. е. отношение синусов склонений равно отношению синусов их дуг.



Если же мы предположим, что AE, AD равны четверти окружности, то получим, что отношение синуса всякого склонения к синусу его дуги равно отношению синуса угла A синусу прямого угла, что и требовалось доказать.

Другое доказательство, которое предложили Абул Фазл Табризи[1] в своем комментарии к „Алмагесту“ и Абу Джафар Хазен[2] в своей книге „Исследования склонений“ ранее перечисленных выше ученых.

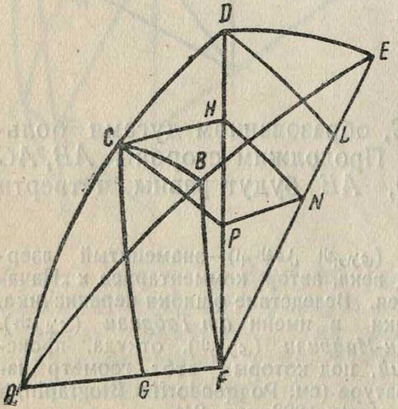
Пусть в треугольнике ABC, образованном дугами больших кругов, угол B—прямой. Продолжим стороны AB, AC до тех пор, пока дуги AD, AE будут равны четверти

---

[1] Абул Фазл Табризи (ابوالفضل التبریزی)—знаменитый азербайджанский (тавризский) геометр X века, автор комментариев к „Началам“ Евклида и „Алмагесту“ Птолемея. Вследствие ошибки переписчика, перепутавшего диакритические точки в имени *ат-Табризи* (التبریزی), это имя часто писали в виде *ан-Найризи* (النيريزى), откуда, происходит латинизированное имя *Анариций*, под которым этот геометр известен в западноевропейской литературе (см. Poggendorff's Biographixh litterarischer Handwörterbuch, т. III, Leipzig 1898, стр. 24).

[2] Абу Джафар Хазен (ابوجعفر الخازن)—известный математик и физик X—XI вв.

окружности. Проведем дугу DE, полюсом которой является точка A, продолжим ее до пересечения с продолжением стороны BC в точке G. Эта точка будет полюсом дуги AE. Из центра сферы F проведем радиусы FG, FB, FD, FE; так как GB, GE равны четверти окружности, то углы GFE, GFB будут прямыми и GF будет перпендикуляром к плоскости круга AE. Из точки C опустим на радиус DF перпендикуляр CH. Так как плоскости двух кругов AD, DE пересекаются под прямым углом по линии пересечения DF, то DF будет перпендикуляром к плоскости круга DE. Точно также из C опустим перпендикуляр CP на BF, линию пересечення кругов AB, BC, и, наконец, опустим перпендикуляр NH в плоскости круга DE на линию пересечения EF плоскостей кругов ED и AE; так как CP и NH—перпендикуляры, расположенные в плоскости двух кругов, пересекающих плоскость круга ABE под прямым углом, к линии перечечения этих кругов, они являются перпендикулярами к плоскости ABE, и, следовательно, параллельны. Так как прямые CP, GF расположены в одной плоскости и являются перпендикулярами к одной линии пересечения, они также параллельны; по той же причине и GF, HN параллельны, вследствие чего CP, HN также параллельны. Проведем линию NP. Углы HNP, CNP обязательно будут прямыми. Но, так как CH является перпендикуляром к плоскости круга DE и так как HN находится в этой плоскости, то угол CHN будет также прямым и четырехугольник $CHNP$ будет параллелограммом. Из D опустим перпендикуляр DL на FE, тогда DL, HN будут параллельны, треугольники DLF, HNF будут подобны, откуда $\frac{LD}{DF} = \frac{NH}{HF}$. Но LD=синус DE, в то время как дуга DE измеряет угол A; DF—является радиусом, т. е. синусом прямого угла; NH=CP=синус BC; HF=синус CA, так как CH является перпендикуляром к радиусу DF, и AC является дополнением DC[1]; следовательно $\frac{\text{синус } DE = \text{синус } A}{\text{синус прямого угла}} = \frac{\text{синус } BC}{\text{синус } AC}$, что и требовалось доказать.

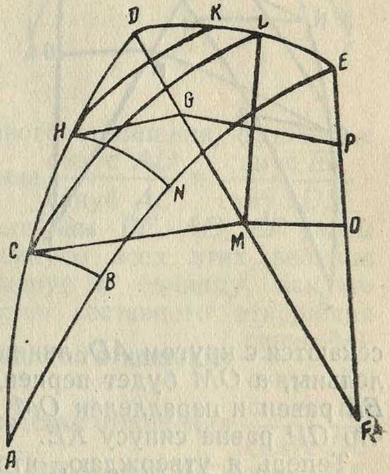


[1] Здесь и ниже под выражением „дополнение дуги“ понимается дополнение дуги до четверти окружности.

Другой способ, принадлежащий Абу Махмуду Ходженди

Этот способ является наиболее простым и убедительным из всех изложенных нами способов.

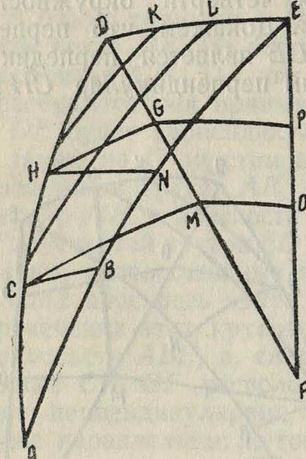
Рассмотрим опять треугольник ABC и дополним дуги AB, AC до дуг AE, AD, равных четверти окружности; проведем радиусы FA, FB, FD, FE. Докажем, что перпендикуляр AF к плоскости круга DE является перпедикуляром к радиусам FD, FE. Опустим перпендикуляр CH на плоскость DE и перпендикуляры CP, HN на плоскость круга ABF. Проведем линию NP. Докажем, что CH, NP параллельны и что они образуют прямые углы с линией HN. Опустим перпендикуляр DL; докажем, что эта линия параллельна HN и что поэтому треугольники DLF, HNF подобны. Проведем в плоскости круга AD линию CG, перпендикулярную к общему пересечению AF; она будет параллельна HF; углы F, G будут прямые; угол CFH также будет прямым, так как линия CH перпендикулярна FD, и $CHFG$ будет, следовательно, прямоугольником. Поэтому отношение линии $FH=HG$, равной синусу AC, к линии $HN=CP$, равной синусу CB, равно отношению FD, т. е. синуса прямого угла, к DL, т. е. синусу угла A.



Если мы рассмотрим на дуге AD какую-нибудь другую точку, то наше утверждение не изменится, так что мы можем сказать, что отношение синусов дуг равно отношению синусов склонений, что и требовалось доказать.

Другое доказательство Абу Рейхана. Рассмотрим опять треугольник ABC и дополним дуги AB и AC до дуг AD, AE, равных четверти окружности. Возьмем на дуге AD точку H, отличную от C, и через эту точку проведем под прямым углом к AE дугу большого круга HN; углы B, N будут прямые. Возьмем полюс дуги AE и проведем две дуги малых кругов CL, HK—одну через точку C, а другую—через точку H; эти дуги будут параллельны четверти окружности AE. Опустим на радиус FD перпендикуляры CM, HG; тогда линия FM будет равна синусу дуги AC, а FG—синусу AH, так как CM—синус дуги CD, дополнения AC, а HG—синус DH, дополнения AH.

Из оснований перпендикуляров M, G опустим перпендикуляры MO, GP на радиус FE, так как плоскость DE перпендикулярна плоскости круга AE, она пересечет плоскости малых кругов HK и CL под прямым углом.



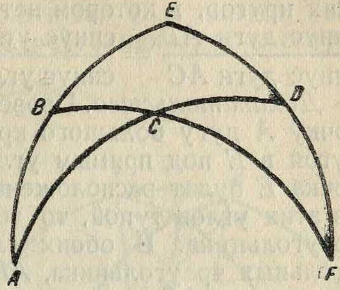
Перпендикуляр CM расположен в плоскости круга AD и образует прямой угол с линией пересечения DF, поэтому он является перпендикуляром к плоскости круга DE. В то же время он пересекается с окружностью малого круга CL, и так как этот малый круг перпендикулярен к той же плоскости, этот перпендикуляр расположен в плоскости малого круга CL.

Проведем прямую линию LM; эта линия является пересечением плоскостей малого круга CL и круга ED. Поэтому плоскости CL и AE параллельны, и так как они обе пересекаются с кругом AD, линии пересечения EF, будут параллельны, а OM будет перпендикулярна к ним; поэтому синус EL равен и параллелен OM. Таким же образом мы докажем, что GP равна синусу KE.

Теперь я утверждаю, что EL, BC представляют собой две дуги больших кругов, проходящих через полюс двух параллелей; они соединяют два параллельных круга, откуда следует, что они равны, как это доказано в „Сферике" Теодосия; то же самое относится к KE, HN. Поэтому $OM=$ $=$синус BC и $PG=$синус HN, а так как $\frac{FM}{MO}=\frac{FG}{GP}$, то мы получаем, что $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } BC}=\frac{\text{синус } AH}{\text{синус } HN}$, т. е., что отношения синусов дуг к синусам их склонений равны, что и требовалось доказать.

Вот то, что люди этой науки изложили по этому вопросу.

Доказательство на основе теории полного четырехсторонника. Рассмотрим треугольник ABC с прямым углом B. Продолжим AB, AC до дуг AE, AD, равных четверти окружности и проведем дугу ED. Продолжим эту дугу и дугу BC до их пересечения в F. В силу теории неявного отношения мы получим, что отношение $\frac{\text{синус } FE}{\text{синус } DE}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } FB}{\text{синус } BC}$ и $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } AD}$. Но так как углы B, E прямые и поэтому дуги FE, FB равны четверти окружности мы получим, что $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } BC} = \frac{\text{синус } AD = \text{синус прямого угла}}{\text{синус } DE = \text{синус угла } A}$, что и требовалось доказать.



Иначе. В силу теории неявного отношения, отношение $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } BC}$ составлено из отношение $\frac{\text{синус } AD}{\text{синус } AC}$ и $\frac{\text{синус } EF}{\text{синус } DF}$. Из этих шести величин три величины BF, AD, EF равны четверти окружности, так что синусы всех этих величин равны радиусу; если принять радиус за единицу, как это делал Абу Рейхан, то количество составного отношения $\frac{\text{синус } BF}{\text{синус } BC}$ равно синусу CB[1], количество отношения $\frac{\text{синус } AD}{\text{синус } AC}$ равно синусу AC и, наконец, количество отношения $\frac{\text{синус } EF}{\text{синус } DE}$ равно синусу DE. Поэтому синус CB=синус $AC \times$синус DE; с другой стороны, синус $CB \times 1$=синус CB, откуда синус $AC \times$ синус DE=синус $CB \times 1$, т. е. $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } CB} = \frac{1}{\text{синус } DE}$, т. е. $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } CB} = \frac{\text{радиус} = \text{синус прямого угла}}{\text{синус угла } A}$, что и требовалось доказать.

Если мы заменим дугу AC другой дугой, то в наших рассуждениях ничего не изменится, отсюда следует, что отношения синусов дуг к синусам их склонений равны отношению максимального синуса, т. е. радиуса, к синусу угла A.

На этом мы закончим то, что нам нужно было сказать о доказательствах это теоремы.

О применении теоремы синусов к другим треугольникам

Для остроугольных и тупоугольных треугольников эта теорема была сформулирована нами в начале этой главы следую-

---

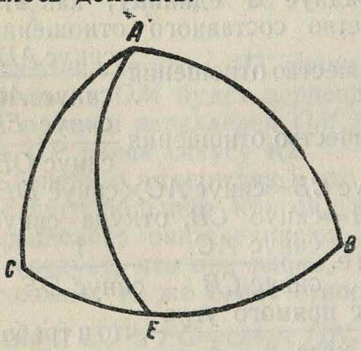
[1] Об определении количества отношения см. сноску 1 на стр. 23. Здесь исправлена ошибка в подлиннике.

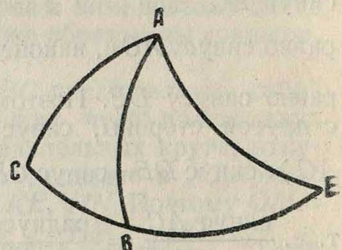
щим образом: *отношение синусов сторон равно отношению синусов углов, имеющих эти стороны своими хордами.*

Пусть дан треугольник ABC, образованный дугами больших кругов, в котором нет прямого угла. Я утверждаю что:

$$\frac{\text{синус дуги } AB}{\text{синус дуги } AC}=\frac{\text{синус угла } C\text{, имеющего хордой дугу } AB}{\text{синус угла } A\text{, имеющего хордой дугу } AC}.$$

Доказательство. Проведем через полюс дуги BC и через точку A дугу большого круга. Круг BC пересечется этой дугой в E под прямым углом. Если углы B, C острые, то точка E будет расположена вне треугольника, а если один из этих углов тупой, то точка E будет находится внутри треугольника. В обоих случаях мы получим два прямоугольных треугольника, ABE и ACE, в первом из которых $\frac{\text{синус дуги } AB}{\text{синус дуги } AE}=\frac{\text{синус прямого угла } E}{\text{синус угла } B}$, а во втором $\frac{\text{синус дуги } AE}{\text{синус дуги } AC}=\frac{\text{синус угла } C}{\text{синус прямого угла } E}$; сопоставляя эти равенства, находим $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}=\frac{\text{синус } C}{\text{синус } B}$, что и требовалось доказать.

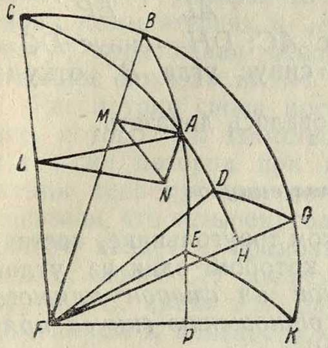


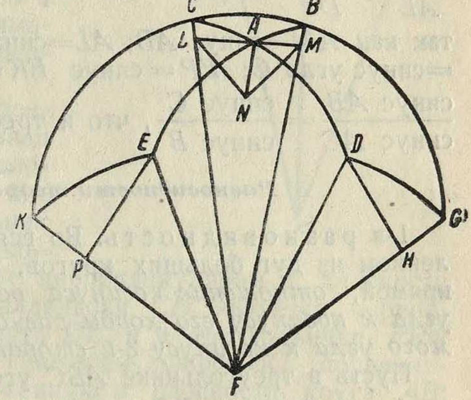


Иначе. Рассмотрим эти же два треугольника.

В первом треугольнике имеется четыре величины, составляющих пропорцию; точно также во 2-м треугольнике тоже имеется четыре пропорциональных величины; но 2-я и 3-я из четырех величин 1-го треугольника равны 1-й и 4-й из четырех величин 2-го треугольника, вследствие чего поверхность, образованная 2-й и 3-й из четырех величин 1-го треугольника, будет равна поверхности, образованной 1-й и 4-й из четырех величин 2-го треугольника. Отсюда следует, что поверхность, образованная 1-й и 4-й из четырех величин 1-го треугольника, должна быть равна поверхности, образованной 2-й и 3-й из четырех величин второго, т. е.

что отношение 1-й из четырех величин 1-го треугольника, т. е. синуса AB, ко 2-й из четырех величин 2-го треугольника, т. е. синусу AC, должно быть равно отношению 3-й из четырех величин 2-го треугольника, т. е. синуса угла C, к 4-й из четырех величин 1-го треугольника, т. е. синусу угла $\frac{B}{C}$, что и требовалось доказать.



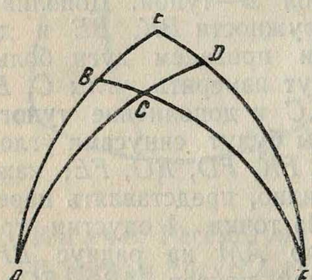


Другое доказательство Эмира Абу Насра. Рассмотрим два треугольника ABC, в одном из которых все углы будут острые, а в другом угол B—тупой. Дополним стороны BC, BA до четвертей окружности BK, BE и до четвертей окружности CD, CG и проведем дуги больших кругов GD, KE; эти дуги будут измерять углы C, B, если они острые, или острый угол C и дополнение тупого угла B. В обоих случаях их синусы будут синусами углов C, B. Проведем радиусы FB, FC, FK, FD, FG, FE; каждый из этих радиусов будет, очевидно, представлять пересечение плоскостей двух кругов. Из точки A опустим три перпендикуляра: 1-й перпендикуляр AM на радиус BF, являющийся пересечением плоскостей кругов AB и EC,—этот перпендикуляр параллелен EF; 2-й перпендикуляр AL—на радиус CF, являющийся пересечением плоскостей BC и AC,—этот перпендикуляр параллелен DF; и 3-й перпендикуляр AN—на плоскость круга GBC. Проведем линии NL, NM, эти линии будут перпендикулярны к линии пересечения, как это было доказано в предварительном предложении. Опустим также перпендикуляр DH на радиус FG; он будет расположен в плоскости круга DG. Так как дуга GBC проходит через точку C, являющуюся полюсом дуги DG, то плоскость этого круга будет перпендикулярна к плоскости круга GBC. Точно также опустим перпендикуляр EP на KF; EP будет, очевидно, также перпендикуляром к плоскости GBC. Поэтому, очевидно, что треугольники ANL, DHF подобны с силу параллельности сторон AL и DF; AN и AH; NL и HF. Точно также подобны треугольники ANM, EPF. Поэтому $\frac{AM}{AN}=\frac{FE}{EP}$ и $\frac{AN}{AL}=\frac{DH}{DF}$, отсюда, так как $EF=DF$, $\frac{AM}{AL}=\frac{DH}{EP}$, или, так как AM=синус AB; AL=синус AC; DH=синус DG==синус угла C; EP=синус EK=синус угла B, откуда $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AC}=\frac{\text{синус } C}{\text{синус } B}$, что и требовалось доказать.

Разновидности теоремы синусов

1-я разновидность. Во всяком треугольнике, составленном из дуг больших кругов, в котором один из углов прямой, *отношение косинуса одной из сторон прямого угла к косинусу его хорды равно отношению синуса прямого угла к косинусу 3-й стороны*[1].

Пусть в треугольнике ABC угол B—прямой. Я утверждаю, что $\frac{\text{косинус } BC}{\text{косинус } AC}=\frac{\text{синус четверти окружности}}{\text{косинус } AB}$.



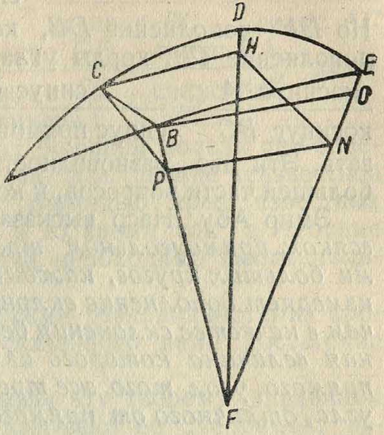
Доказательство. Дополним AC, AB до дуг AD, AE, равных четверти окружности, и продолжим дуги ED, BC до их пересечения в точке F, которая будет полюсом дуги AE; стороны полного четырехсторонника $AEFC$ будут, таким образом, равны четверти окружности, а его углы D, E, B будут прямыми; поэтому в силу теоремы синусов $\frac{\text{синус } FC}{\text{синус } DC}=\frac{\text{синус } FB}{\text{синус } BE}$. Но FC, CD, BE являются дополне-

[1] Эта теорема в формулировке: *в прямоугольном сферическом треугольнике косинус гипотенузы равен произведению косинусов катетов* решает в сферической геометрии ту же задачу, что и теорема Пифагора в плоской геометрии, вследствие чего эту теорему часто называют „сферической теоремой Пифагора" По поводу термина „косинус" см. сноску на стр. 92.

ниями дуг CB, AC, AB, а синус FB равен максимальному синусу, откуда

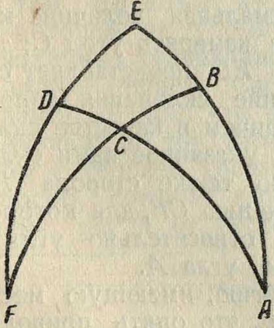
$$\frac{\text{косинус } BC}{\text{косинус } AC} = \frac{\text{синус четверти окружности}}{\text{косинус } AB},$$

что и требовалось доказать.



Иначе. Абул Фазл Табризи и Абу Джафар Хазен в своих комментариях к „Алмагесту“ предложили непосредственное доказательство.

Рассмотрим снова построение, которое мы заимствовали у тех же авторов при изложении теоремы синусов. Мы доказали, что четырехугольник $CHPN$ является прямоугольником, линия CH является перпендикуляром к плоскости круга DE, линия PN, параллельная CH, является перпендикуляром к плоскости круга DE и в треугольнике FPN угол N является прямым. Проведем линию BO, перпендикулярную к EF, расположенную в плоскости круга AB; линия PN расположена в той же плоскости и треугольники FBO, FPN будут подобны, откуда отношение FP, т. е. косинуса BC к $PN{=}CH$, т. е. к косинусу AC, равно отношению FB, т. е. радиуса или максимального синуса, к BO, т. е. косинусу AB, что и требовалось доказать.



2-я разновидность. Во всяком треугольнике, образованном дугами больших кругов и имеющем один прямой угол, *отношение косинуса угла, отличного от прямого, к косинусу хорды этого угла равно отношению синуса другого угла, отличного от прямого, к синусу прямого угла.*

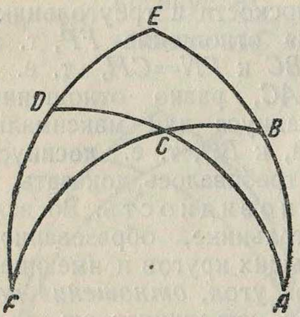
Пусть в треугольнике ABC угол B прямой, я утверждаю, что

$$\frac{\text{косинус } A}{\text{косинус } BC} = \frac{\text{синус } C}{\text{синус прямого угла}}.$$

Доказательство. Дополним наш треугольник до полного четырехсторонника $EAFC$, стороны которого равны четверти окружности. В треугольнике CDF угол D—прямой и в силу теоремы синусов $\dfrac{\text{синус } DF}{\text{синус } FC} = \dfrac{\text{синус } C}{\text{синус прямого угла}}$,

Но DF—дополнение DE, которая измеряет угол A, FC—дополнение CB, хорды угла A, откуда в треугольнике ABC $\dfrac{\text{косинус } A}{\text{косинус } BC} = \dfrac{\text{синус } C}{\text{синус прямого угла}}$, что и требовалось доказать. Эти две разновидности теоремы синусов важны для большей части вопросов, к которым применяется эта теорема.

Эмир Абу Наср высказал следующее утверждение: *во всяком прямоугольном треугольнике, образованном дугами больших кругов, каждый угол, отличный от прямого, измеряет дополнение склонения дополнения его хорды, причем в качестве склонения берем то склонение, максимальная величина которого измеряет другой, отличный от прямого, угол того же треугольника*[1], *и наоборот, хорда угла, отличного от прямого, является дополнением дуги, дополнение склонения которой является мерой угла, хордой которого является эта дуга, причем в качестве склонения берем указанное склонение.* Таким образом, мерой угла A в треугольнике ABC полного четырехсторонника, который мы только что построили, является дуга ED, равная дополнению дуги DF и представляющая собой склонения дуги CF, являющейся дополнением BC, причем в качестве склонения взято то склонение, максимальная величина которого будет измерять угол C; таким образом ED представляет собой дополнение склонения дополнения BC, причем в качестве склонения взято указанное нами склонение. Точно также сторона BC равна дополнению CF, для которой склонением относительно угла C является дуга FD, равная дополнению угла A.



Это замечание устанавливает аналогию, имеющую место для углов и дуг. На практике, однако, это опять приводит к указанной выше 2-й разновидности теоремы синусов, т. е. к тому, что отношение синусов дополнения угла, отличного от прямого, к синусу дополнения хорды этого угла равно

[1] Т. е., например, на прилагаемом чертеже, из двух дуг CD и DF, которые можно рассматривать как склонения дуги CF, следует взять дугу DF, так как если деформировать полный четырехсторонник таким образом, чтобы эта дуга стала максимальной (что произойдет в том случае, когда угол DFC станет прямым), дуга DF будет измерять угол C.

отношению синуса дополнения угла, отличного от прямого, к синусу хорды прямого угла, т. е. $\frac{\text{косинус } A}{\text{косинус } BC} = \frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AC}$ что вытекает из равенства $\frac{\text{синус } DF}{\text{синус } FC} = \frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AC}$, доказываемого помощью теоремы синусов.[1]

Это утверждение не приносит большой пользы при определении неизвестных величин, так как знание неизвестной величины достигается здесь с помощью трех известных величин, помимо прямого угла, в то время как в теореме синусов и ее двух разновидностях необходимо иметь только две известных величины.

Эта теорема обладает и другими разновидностями, кроме приведенных нами; однако сказанного нами достаточно для нашей цели.

Абу Махмуд Ходженди называл эту теорему „правилом астрономии"[2]. Другие ученые называют ее „теоремой, избавляющей от полного четырехсторонника"[3]. В своей книге „Ключи к познанию происходящего на поверхности сферы" Абу Рейхан утверждает, что Эмир Абу Наср первый применил теорему синусов вместо полного четырехсторонника, но ее название[4] дал ей Киа Кушйар Либан ал-Джаили[5].

Однако это утверждение противоречит тому, что Эмир Абу Наср во второй части книги I своего „Шахского Алмагеста", в начале главы III, называющейся „Глава III о том, что может избавить от полного четырехсторонника", в которой он упоминает трактат Сабита ибн Курра[6] о различных разновидностях теоремы о полном четырехстороннике, пишет: „Сабит ибн Курра точно также написал трактат о „том, что может избавить от полного четырехсторонника", но тот, кто прибегает к этому, должен быть знаком с теорией составных отношений, а я сейчас изложу способ, который избавляет как от полного четырехсторонника, так и от составных отношений". Эти слова вполне

---

1 Из прямоугольного треугольника ABC $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AC} = \frac{\text{синус } C}{\text{синус прямого угла}}$, а, из прямоугольного треугольника CDF тому же равно отношение $\frac{\text{синус } DF}{\text{синус } CF}$.

2 قانون الحيه (канун уль-хаййат).

3 См. сноску на стр. 148.

4 Т. е. теорема „избавляющая от полного четырехсторонника".

5 Киа Кушйар Абул Хасан ибн Либан ал-Джаили کیا کوشیار ابوالحسن بن لبان الجیلی

6 Сабит ибн Курра. ثابت بن قرة

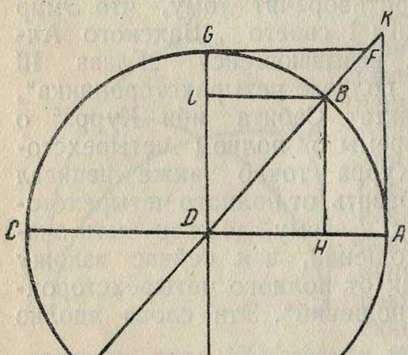
доказывают, что Эмир Абу Наср употреблял название теоремы синусов, которое он заимствовал у Сабита ибн Курра.

Глава VI[1]

в которой говорится о теореме тангенсов[1] *и ее разновидностях*

Приоритет в доказательстве этой теоремы несомненно принадлежит Абул Вафа Бузджани. По свидетельству Абу Рейхана никто другой не может предъявить претензию на это. Эта теорема состоит в том, что *отношение синуса одной из сторон прямого угла прямоугольного треугольника, образованного дугами больших кругов, к синусу прямого угла равно отношению тангенса другой стороны прямого угла к тангенсу угла, хордой которого является эта сторона.*

Прежде чем перейти к доказательству, следует сказать, что под тангенсом дуги здесь понимается линия, отсекаемая диаметрами, проходящими через концы этой дуги, на перпендикуляре, восставленном на одном из ее концов к диаметру, проходящему через этот конец; при этом этот перпендикуляр параллелен синусу этой дуги, который должен



быть перпендикулярен тому же диаметру. Пусть дан круг $ABCE$ с центром D и дуга AB. Проведем диаметры, проходящие через точки A, B, и из точки A восставим к AC перпендикуляр, который пересечет диаметр BE в F; AF есть тангенс дуги AB, параллельный линии BH, являющейся синусом этой дуги. Точно также восставим к AC перпендикуляр DG в центре. Перпендикуляр GK будет тангенсом дуги GB, в то время как BL является синусом этой дуги; другими словами, GK и BL бу-

[1] Мы переводим словом „тангенс“ арабское слово ظل (зилл) дословно—„тень“ (употребляемое нами слово „тангенс“, означающее по латыни „касательная“ введено в Европе в XVI веке. Под словами „тангенс дуги“ здесь понимается то что, мы обычно называем *линией тангенса* угла, соответствующей этой дуге.

Слово „секанс“, означающее по латыни „секущая“, введено одновременно со словом „тангенс“.

дут котангенсом и косинусом дуги AB[1]. То, что мы назвали тангенсом, астрономы называют первой тенью или обратной тенью дуги AB, называемой возвышением или восхождением; они называют GK второй тенью или прямой тенью дуги AB; у них FD—диаметр первой тени, а KD—диаметр второй тени[2] они пользуются этими диаметрами для измерения тангенсов, аналогично тому, как они измеряют синусы и хорды. Иногда они делят вторую тень на двенадцать частей, которые они называют „эсабе"—„пальцами"[3] или же на девять, или на шесть, которые они называют „эгдам"—„шагами".[4] Тангенс всякой дуги является котангенсом ее дополнения, и наоборот; отношение тангенса к радиусу равно отношению синуса дуги в ее косинусу; отношение тангенса к диаметру FD этого тангенса, в силу подобия треугольников FAD и BHD, равно отношению синуса к радиусу; но треугольники AFD и KGD также подобны и $\frac{FA}{AD}=\frac{GD=AD}{KG}$; таким образом, радиус является средним пропорциональным между тангенсом и котангенсом дуги, и отношение тангенсов двух дуг обратно отношению тангенсов их дополнений. Точно также отношение тангенса дуги к тангенсу дополнения второй дуги равно отношению тангенса этой второй дуги к тангенсу дополнения первой дуги.

Если число умножено на некоторое другое число и разделено на некоторое третье число и среднее пропорциональное между множителем и делителем равно единице, то произведение первых двух чисел равно частному от деления первого числа на третье, так как отношение единицы к множителю равно отношению множимого к произведению и отношение единицы к делителю равно отношению частного в делимому и, обратно, к частному[5]. Так как по предположению отношение делителя к единице равно отношению единицы к множителю, отношение делимого к частному будет равно отношению к произведению и, следовательно, отношение делимого к множимому равно отношению част-

---

[1] Мы переводим словом „котангенс" слова ظل تمام (зилл тамам) дословно—„тень дополнения". Под словами „котангенс дуги" здесь понимается то, что мы обычно называем *линией котангенса* угла, соответствуюшего этой дуге.

[2] „Диаметр первой тени", („диаметр" тангенса) „диаметр второй тени" („диаметр" котангенса),—то что мы обычно называем соответственно, *линией секанса и линией косеканса* угла, соответствующего этой.

[3] اسابع

[4] اقدام

[5] Если $\frac{B}{1}=\frac{1}{C}$, то $AB=\frac{A}{C}$

ного к произведению; но по нашему предположению, множимое и делимое совпадают, вследствие чего совпадают и произведение с частным. Поэтому, если мы положим радиус равный единице, как это делал Абу Рейхан, мы получим, что произведение некоторого числа на тангенс дуги равно частному от деления этого числа на тангенс ее дополнения.

Точно также если единица является средним пропорциональным между двумя числами, первое из которых, умножено на некоторе 3-е число, а 2-е разделено на это число, единица является средним пропорциональным между этим произведением и этим частным. В самом деле $\frac{\text{1-е число}}{1}=\frac{1}{\text{2-е число}}$, $\frac{1}{\text{3-е число (множитель)}}=$ $=\frac{\text{1-е число (множимое)}}{\text{произведение}}$ и $\frac{1}{\text{3-е число-делитель}}=$ $=\frac{\text{частное}}{\text{2-е число-делимое}}$. Но поверхность, образованная множимым и делимым, равная 1^2, равна поверхности, образованной произведением и частным, откуда $\frac{\text{произведение}}{1}=$ $\frac{1}{\text{частное}}$. Отсюда следует, что если тангенс дуги умножен на некоторое число и если тангенс дополнения этой дуги разделен на то же число, то радиус будет средним пропорциональным между полученными произведением и частным, и это произведение и частное являются тангенсами двух дуг, дополняющих друг друга до четверти окружности.

A	*D*	*C*
	Единица	
B	*F*	*E*

Точно также, если единица является средним пропорциональным между A и B, а также между C и E, она равна также среднему пропорциональному между $A\times C=D$ и $B\times E=F$; так как $\frac{1}{C\ \text{(множитель)}}=\frac{A\text{-множимое}}{D\ \text{(произведение)}}$ или $\frac{C}{1}=\frac{D}{A}$ и, также $\frac{1}{E}=\frac{B}{F}$, и по предположению $\frac{C}{1}=\frac{1}{E}$, то получим $\frac{D}{A}=\frac{B}{F}$, откуда $D\times F=A\times B$. Но $\frac{A}{1}=\frac{1}{B}$ и окончательно $\frac{D}{1}=\frac{1}{F}$.

Если $\frac{A}{C}=D$ и $\frac{B}{E}=F$, то при том же предположении единица будет средним пропорциональным между D и F. В самом деле, $\frac{1}{C\text{-делитель}}=\frac{D\text{-частное}}{A\text{-делимое}}$ или $\frac{C}{1}=\frac{A}{D}$, и, также $\frac{1}{E}=\frac{F}{B}$. Поэтому $\frac{A}{D}=\frac{F}{B}$, $A\times B=D\times E$, и так как $\frac{A}{1}=\frac{1}{B}$, мы получим $\frac{D}{1}=\frac{1}{F}$. Отсюда следует, что если мы умножим тангенс на тангенс другой дуги, а также умножим друг на друга тангенсы дополнений этих дуг, оба полученные произведения будут тангенсами двух дуг, одна из которых будет дополнением для другой, и с другой стороны, если мы разделим тангенс дуги на тангенс другой стороны, а также разделим друг на друга тангенсы дополнений этих дуг, оба полученные частные также будут тангенсами двух взаимно дополнительных дуг[1]. И наконец, если A и B два числа и $\frac{A}{B}=C$ и $\frac{B}{A}=E$, единица является средним пропорциональным между C и E, так как $\frac{1}{B}=\frac{C}{A}$; $\frac{A}{B}=\frac{C}{1}$; $\frac{B}{A}=\frac{E}{1}$, $\frac{1}{E}=\frac{A}{B}$, откуда $\frac{C}{1}=\frac{1}{E}$. Отсюда следует, что если при деление двух чисел получают тангенс дуги, то обратное деление должно дать тангенс дополнения этой дуги.

Можно получить очень много свойств такого рода, изучая тангенсы. Но вернемся к главному предмету нашего исследования, причем мы установим большую часть доказательства этой теоремы способом, аналогичным тому, которым мы пользовались при доказательстве теоремы синусов.

Прежде всего мы начнем с предварительного предложе-

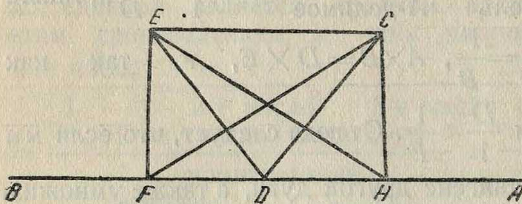
---

[1] Если $\mathrm{tg}A\times\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}C$, то $\mathrm{tg}(90^\circ-A)\mathrm{tg}(90^\circ-B)=\mathrm{tg}\,(90^\circ-C)$; если $\frac{\mathrm{tg}A}{\mathrm{tg}B}=\mathrm{tg}D$, то $\frac{\mathrm{tg}\,(90^\circ-A)}{\mathrm{tg}\,(90^\circ-B)}=\mathrm{tg}(90^\circ-D)$.

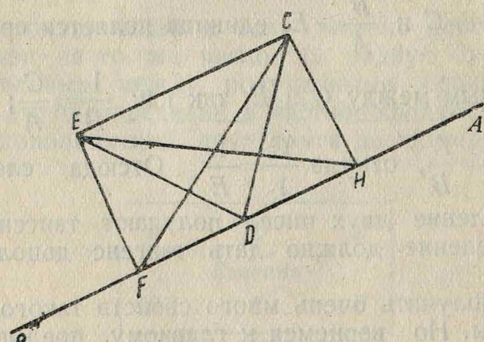
ния, подобного тому, которым начинал свое исследование Абу Наср[1].

Предварительное предложение

Если две плоскости пересекаются под тупым или острым углом и если, задавшись точкой на одной из этих плоскостей, восстановить из нее перпендикуляр к этой плоскости и из этой же точки опустить перпендикуляр на линию пересечения плоскостей, прямая линия, соединяющая точки пересечения 1-го перпендикуляра со 2-й плоскостью и основание перпендикуляра, опущенного на линию пересечения, также будет перпендикулярна линии пересечения.



Пусть AB линия пересечения плоскостей, C—точка на 1-й плоскости, CE—перпендикуляр, восставленный к этой плоскости, пересекающий 2-ю плоскость в точке E, CD—перпендикуляр, опущенный из точки C на AC; если мы соединим точки E и D, то прямая линия DE перпендикулярна AB.



Доказательство. Возьмем на AB произвольную точку F и проведем линии CE, EF. Угол CEF будет прямым, откуда $EF^2=CE^2+CF^2$. Но $CF^2=CD^2+DF^2$, следовательно, $EF^2=CE^2+CD^2+DF^2$. Но $ED^2=EC^2+CD^2$, откуда $EF^2=ED^2+$ $+DF^2$, откуда следует, что угол EDF—прямой, что и требовалось доказать.

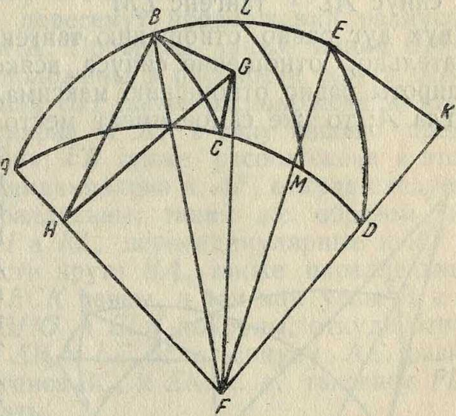
[1] См. стр. 149—151

Другое доказательство. Возьмем $DH=DF$ и проведем прямые CH и EH; в треугольниках CHD и CDF сторона DH равна стороне DF, сторона CD—общая, углы D—прямые, откуда следует, что и $CH=CF$ и следовательно треугольники ECF и ECH также равны. Поэтому $EH=EF$. Откуда следует равенство треугольников EDH и EDF и углов EDH и EDF.

О теореме тангенсов

Пусть в треугольнике ABC, образованном дугами больших кругов, угол B является прямым, а угол A—острый. Я утверждаю, что

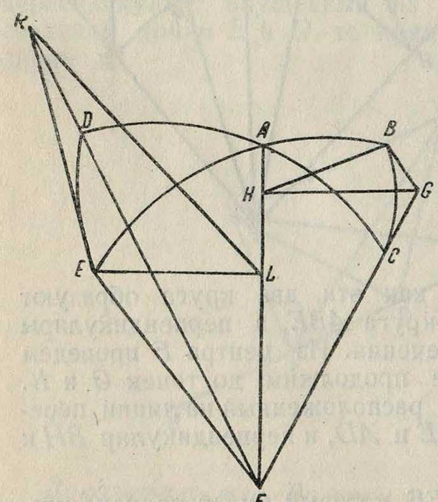
$$\frac{\text{синус } AB}{\text{синус прямого угла } B}=\frac{\text{тангенс } BC}{\text{тангенс } A}$$



Доказательство. Продолжим дуги AB и AC до дуг AE и AD, равных четверти окружности, и проведем через эти две точки дугу большого круга, которая будет измерять угол A. Из точек B и E восставим перпендикуляры BG и EK к плоскости круга ABE, которые пересекут плоскость круга ACD в точках G и K. Эти два перпендикуляра обязательно будут расположены соответственно в плоскостях кругов BC и DE, так как эти два круга образуют прямой угол с плоскостью круга ABE, а перпендикуляры восставлены в точках пересечения. Из центра F проведем радиусы FC и FD, которые продолжим до точек G и K. Проведем также радиус FA, расположенный на линии пересечения плоскостей кругов AE и AD, и перпендикуляр BH к этому радиусу.

Проведем также радиус FE, который будет перпендикулярен к AF, так как дуга AE равна четверти окружности. Наконец проведем прямую линию GH; треугольники GBH и KEF подобны, так как стороны BH и EF, расположенные в плоскости круга ABE, параллельны как перпендикуляры к одной линии AF, стороны GH и KF также параллельны в силу нашего предварительного предложения. Мы можем также провести через точки G и K линии GH и KF, перпендикулярные к линии AF в плоскости круга ACD, а затем провести линии BH и EF, параллельность которых следует из предварительного предложения о теореме синусов, так как это предложение применимо в случаях обеих теорем. Во всяком случае, из установленной нами параллельности сторон подобных треугольников GBH и KEF следует, что отношение BH, т. е. синуса AB, к EF, т. е. радиусу или синусу прямого угла, равно отношению BG, т. е. тангенса BC к EK, т. е. тангенсу ED или тангенсу угла A.

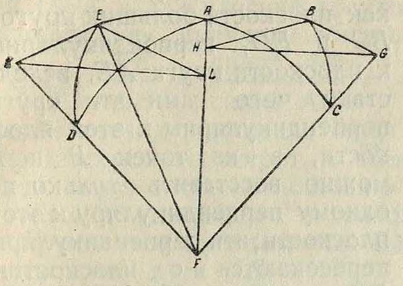
Отсюда следует, что если мы предположим, что некоторая другая дуга, например дуга LM, перпендикулярна к кругу AE, то получим также, что $\frac{\text{синус } AL}{\text{синус } AE}=\frac{\text{тангенс } LM}{\text{тангенс } ED}$ и $\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AL}=\frac{\text{тангенс } BC}{\text{тангенс } LM}$; так что отношение синусов двух дуг равно отношению тангенсов их широт и, следовательно, отношение синуса всякой дуги к тангенсу ее широты равно отношению максимального синуса к тангенсу угла A; то же самое имеет место в двух прямоугольных треугольниках, имеющих по одному острому углу, причем эти треугольники могут и не налагаться друг на друга, как это имеет место в случае примыкающих друг к другу треугольников ABC и AED с равными острыми углами A и прямыми углами B и E, что можно доказать в точности так же, как мы это сделали выше.

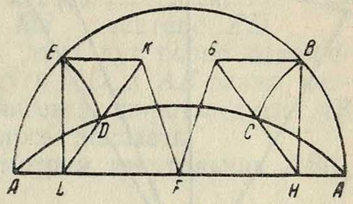


Геометры обычно ограничиваются приведённым доказательством; тем не менее я считаю, что, для сохранения единства стиля нашего изложения, необходимо привести и другие доказательства тех же предложений, как мы это делали в случае теоремы синусов.

Другой способ. Пусть в двух треугольниках ABC и AED, образованных дугами больших кругов, углы A равны как вертикальные углы, а углы B и E—прямые. Из центра F

проведем радиусы FC, FB, FA, FE, FD. Опустим из точек B и E перпендикуляры BH и EL на линию AF, являющуюся





линией пересечения плоскостей кругов AB и AC; в тех же точках B и E восставим перпендикуляр BG к плоскости круга AB и перпендикуляр EK к плоскости круга AC, причем эти перпендикуляры пересекут продолжения радиусов FC и FD в точках G и K. Проведем также линии GH и KL. Линии HF, GF расположены в плоскости круга AB[1], откуда следует, что линия GH также расположена в этой плоскости и перпендикулярна к AF в силу нашего предварительного предложения; EL также расположена в этой плоскости и также перпендикулярна к AF, откуда следует, что линии GH и EL параллельны; таким же образом мы докажем, что линии BH и KL, перпендикулярные к AF и расположенные в плоскости круга BA, также параллельны; поэтому углы BHG и ECK равны, и так как углы B и E прямые, треугольники BHG и ELK подобны, откуда отношение BH, т. е. синуса AB, к LE, т. е. синусу AE, равно отношению BG, т. е. тангенса BC, к EK, т. е. тангенсу FD, что и требовалось доказать.

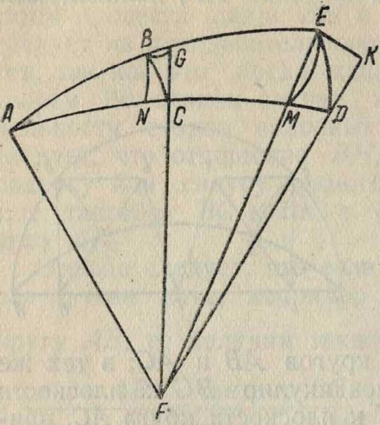
Такое же доказательство имеет место и в том случае, когда равные углы треугольника образованы одними и теми же большими кругами, но имеют вершины в противоположных точках.

Другое доказательство. Пусть треугольники ABC и AED образованы дугами больших кругов. Эти треугольники имеют общий угол A и прямые углы B и E; F—центр; FA, FC, FD—радиусы. Проведем через точки B и E дуги малых кругов BN и EM с общим полюсом A; опустим из тех же точек перпендикуляры BH и EL на линию AF, служащие радиусами определенных нами малых кругов. Точно также восставим из точек B и E перпендикуляры BG и EK к плоскости круга AE, являющиеся линиями пере-

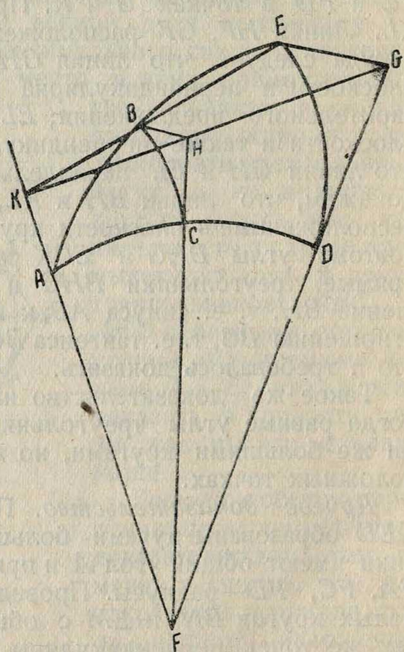
---

[1] В подлиннике ошибочно вместо линии HF указана линия HB.

сечения плоскостей малых кругов с плоскостями больших



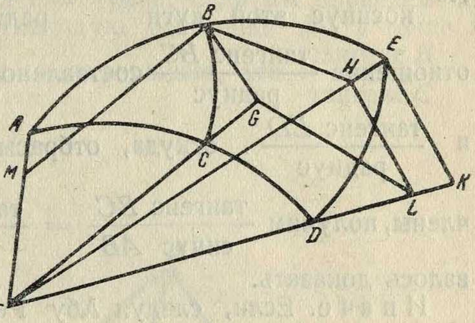
кругов BC и ED, так как плоскости малых кругов, так же как плоскости больших кругов BC и ED, перпендикулярны к плоскости круга AE, вследствие чего сами эти круги перпендикулярны к этой плоскости, а из точек B и E можно восставить только по одному перпендикуляру к этой плоскости; эти перпендикуляры пересекаются с плоскостью BC в точках G, K. Точки G, N, H, находящиеся одновременно в плоскости малого круга BN и в плоскости большого круга ACD, расположены на линии пересечения этих плоскостей GH; точно также точки K, M, L, расположены на линии KL; в силу подобия дуг BN, EM, расположенных между дугами больших кругов AE, AD, проходящих через полюс A, и в силу равенства отношений тангенсов подобных дуг к их радиусам, мы получим, что отношение BH, т. е. синуса AB, к BG, т. е. тангенсу BC, равно отношению EL, т. е. синуса AE к EK, т. е. тангенсу ED, т. е. отношение синуса дуги к тангенсу ее широты равно отношению синуса другой дуги к тангенсу ее широты, и если AE и AD равны четверти окружности, равно отношению максимального синуса, т. е. радиуса, к тангенсу угла A.

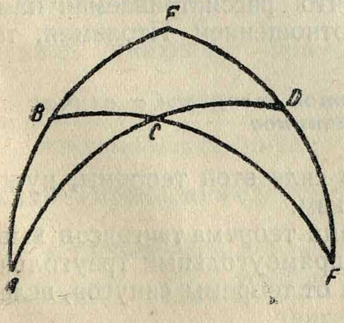


Другое доказательство. Пусть ABC и AED—треугольники, определенные выше; BH, EG—перпендикуляры к плоскости ABE; продолжим радиусы FC и FD до их пересечения с этими перпендикулярами в точках G и H, а также хорду BE до ее пересечения с радиусом A в точке K.

Точки K, H, G, расположенные в плоскости перпендикуляров BH, EG, параллельных между собой, а также в плоскости AD, находятся на линии пересечения этих плоскостей GHK и два плоские треугольника KBH и KEG будут подобны, как имеющие общий угол K и прямые углы B и E. Но $\frac{KB}{KE}=\frac{\text{синус } AB}{\text{синус } AE}==\frac{BH}{EG}=\frac{\text{тангенс } BC}{\text{тангенс } ED}$ и, следовательно, отношение синусов двух дуг равно отношению тангенсов их широт, и если дуги AD и AE равны четверти окружности—отношению тангенса широты дуги AB к тангенсу угла A, что и требовалось доказать.

Другое доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, продолжим дуги AB, AF до дуг AD, AE, равных четверти окружности, проведем дугу DE и радиусы FA, FC, FD, FE; восставим перпендикуляры BG и EK к плоскости AE и продолжим радиусы FC и FD до пересечения с этим перпендикулярами в точках G и K; опустим перпендикуляр BH на радиус FE в плоскости круга AB, линия BH будет перпендикулярна к плоскости DE; опустим также перпендикуляр GL на радиус FD в плоскости круга AD; линия GL будет также перпендикулярна к плоскости круга ED. Проведем также линию HL. Линии GL и BH будут паралельны как два перпендикуляра к одной и той же плоскости, углы BHL и CLH будут прямыми, а угол HBG—также прямой; поэтому четырехугольник $BGHL$ является прямоугольником и HL параллельна BG, которая, в свою очередь, параллельна EK, и, следовательно, HL параллельна EK, и треугольники FHL и FEK подобны, откуда отношение FH, т. е. косинуса BE или синуса AB к $HL=BG$, т. е. тангенсу BC, равно отношению FE, т. е. максимального синуса, к EK, т. е. тангенсу A. Мы могли бы также опустить перпендикуляр BM на FA и доказать, что четырехугольник $BHFM$





является прямоугольником, откуда следует то, что требовалось доказать.

Другое доказательство на основе теории полного четырехсторонника.

В треугольнике ABC угол B — прямой; дуги AD, AE, BF, EF равны четверти окружности. В силу теоремы о полном четырехстороннике отношение $\frac{\text{синус } BC}{\text{синус } CF = \text{косинус } BC}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } BA}{\text{синус } AE}$ и $\frac{\text{синус } ED}{\text{синус } DF = \text{косинус } ED}$.

Но $\frac{\text{синус дуги}}{\text{косинус этой дуги}} = \frac{\text{тангенс дуги}}{\text{радиус}}$ и, следовательно, отношение $\frac{\text{тангенс } BC}{\text{радиус}}$ составлено из отношений $\frac{\text{синус } AC}{\text{радиус}}$ и $\frac{\text{тангенс } ED}{\text{радиус}}$, откуда, отбрасывая равные и 2-й и 6-й члены, получим $\frac{\text{тангенс } BC}{\text{синус } AB} = \frac{\text{тангенс } ED}{\text{радиус}}$, что и требовалось доказать.

Иначе. Если, следуя Абу Рейхану, мы предположим что радиус равен единице, $\frac{\text{тангенс } BC}{\text{радиус}} = \text{тангенс } BC = \text{синус } AB \times \text{тангенс } ED$ или $\text{тангенс } BC \times 1 = \text{синус } AB \times \text{тангенс } ED$; таким образом $\frac{\text{синус } AB}{\text{радиус}} = \frac{\text{тангенс } BC}{\text{тангенс } ED = \text{тангенс угла } A}$. Мы получили бы тот же результат, если бы вместо дуги BC рассмотрели бы другую дугу, что доказывает, что отношение синусов дуг равно отношению тангенсов их широт, что и требовалось доказать.

Мы видим, таким образом, что рассматриваемая нами теорема тесно связана с явным отношением Птолемея, так же как теорема синусов.

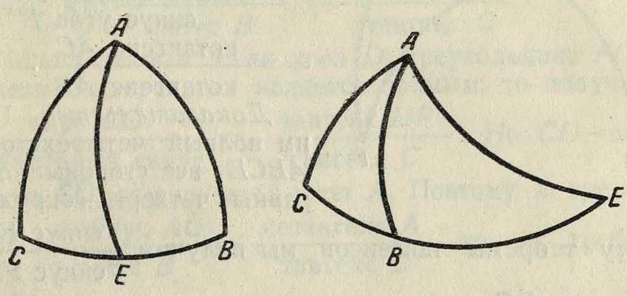
О соблюдении утверждений этой теоремы в случае других треугольников

Для того чтобы убедиться в силе этой теоремы, нужно обратиться к другим треугольникам.

Как мы видим, доказанная нами теорема тангенсов выводится из специфических свойств прямоугольных треугольников. Этим эта теорема отличается от теоремы синусов, вследствие чего здесь нельзя получить непосредственных применений к произвольным остроугольным и тупоугольным треугольникам. Это различие между рассматриваемой теоремой и теоремой синусов дает превосходство этой последней теореме, хотя обе эти теоремы являются, если можно так выразиться, двумя близнецами у одной материнской груди.

Если мы хотим применить теорему тангенсов к произвольным треугольникам, мы должны провести дугу большого круга через один из углов такого треугольника, составляющую прямой угол с кругом, на котором лежит хорда этого угла.

Пусть, например, в треугольнике ABC углы A, C острые, а угол B—острый или тупой. Если мы проведем через A дугу AE, пересекающую основание BC в точке E под прямым углом, то я утверждаю, что $\frac{\text{тангенс } B}{\text{тангенс } C} = \frac{\text{синус } CE}{\text{синус } BE}$.

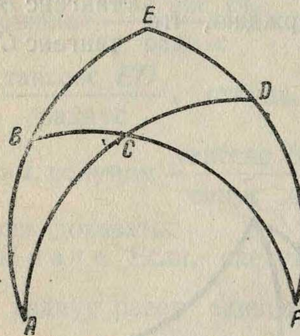


В самом деле, в прямоугольном треугольнике ABE $\frac{\text{тангенс } B}{\text{тангенс } AE} = \frac{\text{максимальный синус}}{\text{синус } BE}$, а в треугольнике AEC, также имеющем прямой угол E, $\frac{\text{тангенс } AE}{\text{тангенс } C} = \frac{\text{синус } EC}{\text{максимальный синус}}$, откуда в силу правила перемешанной пропорции следует, что $\frac{\text{тангенс } B}{\text{тангенс } C} = \frac{\text{синус } CE}{\text{синус } BE}$, что и требовалось доказать.

Точно также $\frac{\text{тангенс угла } BAE}{\text{тангенс } BE} = \frac{\text{тангенс угла } CAE}{\text{тангенс } CE}$, так как каждое из этих отношений равно отношению $\frac{\text{максимальный синус}}{\text{синус } AE}$, откуда, переставляя члены, получим, что $\frac{\text{тангенс угла } BAE}{\text{тангенс } CAE} = \frac{\text{тангенс } BE}{\text{тангенс } CE}$.

Разновидности теоремы тангенсов

1-я разновидность. Во всяком прямоугольнике *отношение косинуса острого угла A к синусу прямого угла равно отношению котангенса хорды прямого угла к котангенсу стороны, находящейся между прямым углом и углом A, т. е. отношению тангенса этой стороны к тангенсу прямого угла.*



Пусть дан треугольник ABC с прямым углом B и острым A. Я утверждаю, что

$$\frac{\text{косинус угла } A}{\text{синус угла } B} = \frac{\text{котангенс } AC}{\text{котангенс } AB}.$$

Доказательство. Построим полный четырехсторонник $ABCD$, все стороны которого равны четверти окружности, и в силу теоремы тангенсов мы получим $\frac{\text{синус } FD}{\text{синус } FE} = \frac{\text{тангенс } DC}{\text{тангенс } EB}$.

Но FD—дополнение отрезка DE, измеряющего угол A, FE—четверть окружности, измеряющая прямой угол, синус которого является максимальным синусом, DC—дополнение AC, EB—дополнение AB; поэтому $\frac{\text{косинус } A}{\text{синус } B} = \frac{\text{котангенс } AC}{\text{котангес } AB}$, что и требовалось доказать.

Другое доказательство. Отношение $\frac{\text{синус } AB}{\text{сииус } BE} = \frac{\text{синус } AB}{\text{косинус } AB} =$ тангенс AB, как мы видим при рассмотрении явного отношения полного четырехсторонника, составлено из отношений $\frac{\text{синус } AC}{\text{синус } CD} = \frac{\text{синус } AC}{\text{косинус } AC} =$ $= \text{тангенс } AC$ и $\frac{\text{синус } DF}{\text{синус } FE} = \frac{\text{косинус } ED}{\text{радиус}} =$ $= \frac{\text{косинус } A}{\text{радиус}}$, откуда $\frac{\text{тангенс } AB}{\text{тангенс } AC} = \frac{\text{косинус } A}{\text{радиус}}$, но $\frac{\text{тангенс } AB}{\text{тангенс } AC} = \frac{\text{котангенс } AC}{\text{котангенс } AB}$, откуда $\frac{\text{косинус } A}{\text{синус } B} =$ $\frac{\text{котангенс } AC}{\text{котангенс } AB}$, что и требовалось доказать.

2-я разновидность. *Отношение косинуса хорды прямого угла к синусу прямого угла равно отношению котангенса одного из двух острых углов и тангенсу другого угла.*

В случае треугольника ABC с прямым углом B я утверждаю, что $\frac{\text{косинус } AC}{\text{синус } B} = \frac{\text{котангенс } A}{\text{тангенс } C}$.

Доказательство. Если угол D треугольника FCD полного четырехсторонника является прямым, то получим, что $\frac{\text{синус } CD}{\text{максимальный синус}} = \frac{\text{тангенс } DF}{\text{тангенс } C}$. Но CD—дополнение дуги ED, измеряющей угол A. Поэтому в треугольнике ABC $\frac{\text{косинус } AC}{\text{синус } B} = \frac{\text{котангенс } A}{\text{тангенс } C}$, что и требовалось доказать.

Это соотношение является одним из наиболее часто применяемых соотношений при рассмотрении вопросов, связанных с этой теоремой.

3-я разновидность. *Отношение котангенса одного из острых углов к тангенсу стороны, расположенной между этим углом и прямым углом, равно отношению косинуса хорды прямого угла к синусу 3-й стороны.*

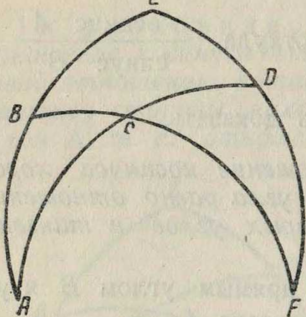
В случае треугольника ABC с прямым углом A, я утверждаю, что $\frac{\text{котангенс } A}{\text{тангенс } AB} = \frac{\text{косинус } AC}{\text{синус } BC}$.

В самом деле, в рассматриваемом полном четырехстороннике отношение тангенса DF, т. е. дополнения угла A, к тангенсу AB равно отношению синуса DC, т. е. косинуса AC, к синусу CB, так как в треугольниках ABC и DCF

углы C равны, а углы B и D прямые, что и требовалось доказать.

Эта разновидность теоремы тангенсов применяется не часто, так как для разыскания неизвестной здесь требуется знание трех известных, тогда как это может быть достигнуто с помощью только двух известных.

Дополнение. В прямоугольном треугольнике каждый угол, отличный от прямого, измеряет дополнение широты дополнения хорды прямого угла, причем в качестве широты берем ту широту, максимальная величина которой измеряет другой, отличный от прямого, угол[1], и обратно, хорда прямого угла измеряет дополнение дуги, широта которой является дополнением угла, отличного от прямого, причем в качестве широты берем широту, максимальная величина которой измеряет другой непрямой угол.



Рассмотрим предыдущее построение и пусть угол A треугольника ABC измеряется дугой ED, являющейся дополнением дуги, которая, в свою очередь, является широтой дуги CD, и притом такой широтой, максимальная величина которой измеряет угол C; дуга DC будет дополнением дуги AC, следовательно, угол A измеряется дополнением широты дополнения дуги AC, причем эта широта является такой широтой, максимальная величина которой измеряет угол C. Точно также сторона AC является дополнением дуги CD, широтой которой является дуга FD, представляющая собой дополнение угла A; поэтому AC является дополнением дуги, широта которой является дополнением угла A, причем эта широта является такой широтой, максимальная величина которой измеряет угол C.

У этого утверждения имеется аналог в случае теоремы синусов[2].

---

[1] Т. е., например, на прилагаемом чертеже из двух дуг CD и FD, которые можно рассматривать как широты дуги CF, следует взять дугу DF, так как, если деформировать полный четырехсторонник таким образом, чтобы эта дуга стала максимальной (что произойдет в том случае, когда угол DFC станет прямым), дуга DF будет измерять угол C.

[2] См. утверждение Абу Насра, стр. 166.

Известно, что многие крупные ученые выражали недовольство этой теоремой по причине плохого поведения тангенсов дуг, превосходящих восьмую часть круга. В самом деле, эти тангенсы весьма быстро превосходят радиус, так как уже тангенс восьмой части окружности равен радиусу. Поэтому, если мы будем записывать тангенсы дуг в виде таблицы, в которой дуги увеличиваются равномерно, разности тангенсов дуг бо́льших восьмой части окружности, становятся весьма значительными. Поэтому нахождение тангенсов промежуточных значений дуг с помощью таких таблиц затруднительно.

Однако, если относиться к этому вопросу по-совести, указанное возражение против этой теоремы отпадает, так как не необходимо пользоваться тангенсами только из таких таблиц. При всех обстоятельствах мы можем пользоваться для наших нужд тангенсами дуг, меньших восьмой части окружности, так как тангенсы обладают тем не имеющимся у синусов свойством, что всегда можно пользоваться тангенсами дуг меньших восьмой части окружности. Мы коснулись этого раньше несколькими словами в начале главы, а теперь мы покажем, каким образом можно пользоваться всеми тангенсами, зная только тангенсы дуг, меньших восьмой части окружности.

В предыдущем изложении мы видели, что из четырех пропорциональных величин, встречающихся во всех разновидностях этой теоремы, две являются синусами, из которых одна является большей частью максимальным синусом, а две другие являются тангенсами, и неизвестная величина находится с помощью одного умножения и одного деления. Если мы примем радиус равным единице, неизвестная величина будет синусом или тангенсом. Если неизвестная является синусом, она может быть определена путем умножения двух тангенсов друг на друга или путем деления одного тангенса на другой; если неизвестная является тангенсом, она может быть определена путем умножения синуса на тангенс, или путем деления синуса на тангенс, или же путем деления тангенса на синус. Это составляет пять случаев.

1-й с л у ч а й. Неизвестная является синусом, определяющимся умножением двух тангенсов. Но в этом случае оба тангенса не могут быть больше радиуса, так как отношение единицы к одному из них должно быть равно отношению другого тангенса к главному синусу. Если один из двух тангенсов больше единицы, то синус должен быть больше другого тангенса, и так как не существует синуса большего чем радиус, второй тангенс обязательно должен быть меньше радиуса. Следовательно, или оба тангенса будут меньше радиуса, или один тангенс будет больше, а другой меньше радиуса.

О случае, когда оба тангенса меньше радиуса, говорить нет необходимости. Рассмотрим случай, когда один тангенс меньше, а другой больше радиуса. В этом случае, если мы разделим тангенс, меньше радиуса, на котангенс дуги, тангенс которой больше радиуса, частное будет равно произведению наших тангенсов, что следует из доказанного нами в начале этой главы. Если бы, что не может встретиться в этой теореме, некоторый тангенс был бы равен произведению двух тангенсов бо́льших радиуса, то для того чтобы получить дугу, тангенс которой был бы равен этому произведению, мы должны были бы умножить котангенс дуги множителя на котангенс дуги множимого и это произведение, как мы доказали выше, будет равно котангенсу искомой дуги.

2-й с л у ч а й. Неизвестная является синусом, определяющимся делением одного тангенса на другой. Здесь делимое меньше делителя, так как частное от деления должно быть меньше единицы. Если оба тангенса больше, чем радиус, мы разделим котангенс дуги делителя на котангенс дуги делимого и частное будет искомым синусом, так как отношение двух тангенсов всегда равно обратному отношению котангенсов, как мы показали выше. Если один из двух тангенсов больше, а другой—меньше радиуса, и если тангенс больше делимого, мы должны умножить делимое на котангенс дуги делителя и произведение будет искомым синусом. Случай, когда делимое больше делителя, как мы уже говорили, невозможен.

3-й с л у ч а й. Неизвестная является тангенсом, определяющимся произведением синуса на тангенс. Если тангенс, являющийся сомножителем, больше радиуса, мы разделим синус на котангенс этой дуги и частное будет искомым тангенсом; если полученное частное будет больше единицы, мы разделим единицу на частное и результат будет тангенсом дополнения искомой дуги; это дополнение можно найти в таблице для восьмой части круга. Таким образом нужно действовать в случае всякого тангенса, большего, чем радиус, если мы захотим найти его дугу с помощью этой таблицы. Если же тангенс, являющийся сомножителем, меньше радиуса, то искомый тангенс также будет меньше радиуса, и мы получаем уже рассматриваемый нами случай.

4-й с л у ч а й. Неизвестная является тангенсом, определяющимся делением синуса на тангенс. Если делитель больше, чем радиус, мы умножим синус на котангенс дуги делителя и произведение будет искомым тангенсом.

5-й случай. Неизвестная является тангенсом, определяющимся делением тангенса на синус. Если делимое больше радиуса, мы разделим котангенс дуги делимого тангенса на синус, и частное будет тангенсом дополнения искомой дуги, так как, мы показали выше, результат деления тангенса некоторой дуги на некоторую величину и умножения котангенса этой дуги на ту же величину дает тангенсы двух взаимно дополнительных дуг.

Эти правила применимы к таким четырем величинам, одна из которых равна радиусу; в противном случае, когда среди этих четырех величин произвольные два синуса и два тангенса, число операций умножений и делений, подлежащих рассмотрению, увеличивается, но способ, которым нужно пользоваться в этом случае, в точности такой же, как в только что описанных случаях.

Таким образом мы показали, что во всех случаях можно пользоваться тангенсами, зная тангенсы только дуг, меньших восьмой части окружности. Этим самым полностью отметаются все страхи, возникшие в головах некоторых ослепленных умов по поводу применения этой теоремы.

Глава VII,

в которой излагаются методы определения неизвестных величин по известным в сферических треугольниках

Мы уже указывали в главе V, что простое отношение содержит в себе четыре члена, и поэтому для определения неизвестных величин по известным с помощью этого отношения необходимо знать три величины. Но в каждом треугольнике имеется три стороны и три угла, поэтому если из этих шести величин, три величины известны, можно найти все остальные величины. В прямоугольных треугольниках прямой угол всегда известен, вследствие чего для определения неизвестных здесь достаточно знать только две остальные известные величины. Эти две известные величины могут быть только двумя сторонами, стороной и углом и двумя углами. Если известны две стороны, это могут быть стороны, содержащие прямой угол, или одна сторона, являющаяся хордой прямого угла, и другая—примыкающая к этому углу. Если дана сторона и угол, то сторона может быть хордой прямого угла, хордой известного угла или, наконец, 3-й стороной.

Таким образом, мы имеем шесть случаев, в каждом из которых мы можем применить как теорему синусов, так и теорему тангенсов.

Рассмотрим эти случаи, причем мы ограничимся только установлением того, каким образом нужно производить вычисление, не возвращаясь к доказательствам, приведенным нами выше.

Как нужно определить неизвестные величины по известным в прямоугольных треугольниках с помощью теоремы синуса

1-й случай. Известна хорда прямого угла и другая сторона. По доказанной нами 1-й разновидности синусов:

$$\frac{\text{косинус хорды прямого угла} \times \text{радиус}}{\text{косинус другой известной стороны}} = \text{косинусу неизвестной стороны.}$$

Для углов: в силу теоремы синусов:

$$\frac{\text{синус хорды неизвестного угла} \times \text{радиус}}{\text{синус хорды прямого угла}} = \text{синусу неизвестного угла.}$$

2-й случай. Известны две стороны, содержащие прямой угол.

В силу 1-й разновидности теоремы синусов:

$$\frac{\text{косинус одной из стороны} \times \text{косинус другой стороны}}{\text{радиус}} = \text{косинусу хорды прямого угла.}$$

Стороны можно использовать для нахождения углов так же, как в 1-м случае.

3-й случай. Известен угол, отличный от прямого, и хорда этого угла.

По основной теореме синусов:

$$\frac{\text{синус известной стороны} \times \text{радиус}}{\text{синус известного угла}} = \text{синусу хорды прямого угла.}$$

Отсюда найдется 3-я сторона и 3-й угол так же, как в 1-м случае.

4-й случай. Известен угол, отличный от прямого, и хорда прямого угла:

По основной теореме синусов:

$$\frac{\text{синус известного угла} \times \text{синус хорды прямого угла}}{\text{радиус}} = \text{синусу хорды известного угла.}$$

Отсюда найдется сторона и оставшийся угол так же, как в 1-м случае.

5-й случай. Известен угол, отличный от прямого, и сторона, расположенная между этим углом и прямым углом:

По 2-й разновидности теоремы синусов:

$$\frac{\text{синус известного угла} \times \text{косинус известной стороны}}{\text{радиус}} =$$

= косинусу угла, хордой которого является известная сторона.

Отсюда найдутся две другие стороны так же, как в 3-м случае.

6-й случай. Известны два угла, отличные от прямого угла:

По 2-й разновидности теоремы синусов:

$$\frac{\text{косинус одного из углов} \times \text{радиус}}{\text{синус другого угла}} = \text{косинусу хорды 1-го}$$

угла.

Отсюда найдутся две другие стороны так же, как в 3-м случае.

Как нужно определять неизвестные величины по известным в прямоугольных треугольниках с помощью теоремы тангенсов.

1-й случай. Известны две стороны, одна из которых является хордой прямого угла.

По 1-й разновидность теоремы тангенсов:

$$\frac{\text{котангенс хорды прямого угла} \times \text{радиус}}{\text{котангенс другой стороны}} = \text{косинусу угла,}$$

заключенного между двумя известными сторонами.

По основной теореме тангенсов:

$$\frac{\text{тангенс уже найденного угла} \times \text{синус стороны, лежащей}}{\text{радиус}}$$

$$\frac{\text{между этим углом и прямым углом}}{\text{радиус}} = \text{тангенсу хорды этого}$$

угла.

По 2-й разновидности теоремы тангенсов:

$$\frac{\text{тангенс известного угла} \times \text{косинус хорды прямого угла}}{\text{радиус}} =$$

= котангенсу оставшегося угла.

Или по 1-й разновидности:

$$\frac{\text{котангенс хорды прямого угла} \times \text{радиус}}{\text{котангенс стороны, лежащей между неизвестным и прямым углами}} =$$

= косинусу неизвестного угла.

2-й случай. Известны две стороны, содержащие прямой угол.

По основной теореме тангенсов:

$$\frac{\text{тангенс одной из сторон} \times \text{радиус}}{\text{синус другой стороны}} = \text{тангенсу угла, хордой которого является 1-я сторона.}$$

Тем же путем найдется и второй угол.

По 1-ой разновидности теоремы тангенсов:

$$\frac{\text{косинус одного из двух углов} \times \text{котангенс стороны, расположенной между этим углом и прямым углом}}{\text{радиус}} = \text{котангенсу хорды прямого угла.}$$

Или в силу 2-й разновидности,

$$\frac{\text{котангенс одного из двух углов} \times \text{радиус}}{\text{тангенс другой стороны}} = \text{косинус хорды прямого угла.}$$

3-й случай. Известны угол, отличный от прямого угла, и хорда этого угла.

По основной теореме тангенсов:

$$\frac{\text{тангенс известной стороны} \times \text{радиус}}{\text{тангенс известного угла}} = \text{синусу стороны, расположенной между прямым углом и известным углом.}$$

Остальные неизвестные найдутся так же, как во 2-м случае.

4-й случай. Известны угол, отличный от прямого угла и хорда прямого угла.

По 1-й разновидности теоремы тангенсов:

$$\frac{\text{котангенс хорды прямого угла} \times \text{радиус}}{\text{косинус известного угла}} = \text{котангенсу стороны, расположенной между прямым углом и известным углом.}$$

Остальные неизвестные найдутся так же, как в 1-м случае.

5-й случай. Известны угол, отличный от прямого, и сторона, лежащая между известным углом и прямым углом.

По основной теореме тангенсов:

$$\frac{\text{тангенс известного угла} \times \text{синус известной стороны}}{\text{радиус}} = \text{тангенсу хорды известного угла.}$$

Остальные неизвестные найдутся так же, как во 2-м и 3-м случаях.

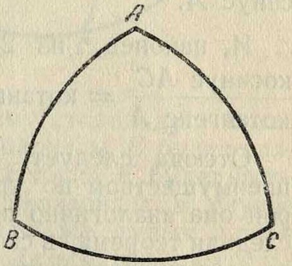
6-й с л у ч а й. Известны все углы.

По 2-й разновидности теоремы тангенсов:

$$\frac{\text{котангенс одного из углов} \times \text{радиус}}{\text{тангенс другого угла}} = \text{косинусу хорды прямого угла.}$$

Остальные неизвестные найдутся так же как в 5-м случае.

Цель, преследуемая этим анализом, состоит отнюдь не в отыскании путей, которыми можно следовать при определении неизвестных, но в том, чтобы показать, что при определении неизвестных в прямоугольных треугольниках, играющих основную роль среди всех треугольников, можно пользоваться как одной, так и другой из двух рассматриваемых нами теорем, так как в конечном счете сообразительный человек, хорошо усвоивший доказательства, всегда с большой легкостью снова найдет приемы вычисления, чем тот, кто рабски выучит приведенные нами формулы.



Точно также, тот, кто хорошо усвоил то, что было здесь сказано по поводу свойств тангенсов и различных разновидностей теоремы тангенсов, может извлечь из одного и того же доказательства много формул для определения одной и той же неизвестной.

Пусть, например, нам дан прямоугольный треугольник ABC. По основной теореме тангенсов, если известны стороны AB и угол A, причем угол B—прямой, радиус равен единице, и если требуется найти сторону BC, то кроме того, что тангенс $A \times$ синус $AB =$ тангенс BC, мы будем иметь также, что $\frac{\text{котангенс } A}{\text{синус } AB} = \text{котангенс } BC$ и $\frac{\text{синус } AB}{\text{котангенс } A} =$ $=$ тангенс BC.

Точно также, если известны угол A и сторона BC и требуется найти сторону AB, мы будем иметь, что $\frac{\text{тангенс } BC}{\text{тангенс } A} = \text{синус } AB$, тангенс $BC \times$ котангенс $A =$ синус AB, $\frac{\text{котангенс } A}{\text{котангенс } BC} = \text{синус } AB$; то же выражение мы получим также, если мы разделим котангенс BC на котангенс A и 1 на полученное частное.

Так как в силу 1-й разновидности теоремы тангенсов, т. е. того, что косинус $A \times$ котангенс $AB =$ котангенс AC, мы получим также, что $\frac{\text{косинус } A}{\text{тангенс } AB} =$ котангенс AC и $\frac{\text{тангенс } AB}{\text{косинус } A} =$ тангенс AC, исходя из того, что $\frac{\text{котангенс } AC}{\text{котангенс } AB} =$ $=$ косинусу A, мы получим также, что $\frac{\text{тангенс } AB}{\text{тангенс } AC} =$ $=$ косинус A, тангенс $AB \times$ котангенс $AC =$ косинус A, тангенс $AC \times$ котангенс $AB =$ косинус A, и $\frac{\frac{1}{\text{тангенс } AC}}{\text{тангенс } AB} =$ косинус A.

И, наконец, из 2-й разновидности мы получим, что $\frac{\text{косинус } AC}{\text{котангенс } A} =$ котангенс C и $\frac{\text{котангенс } A}{\text{косинус } AC} =$ тангенс C.

Отсюда следует, что если теорема синусов обладает преимуществом по сравнению с теоремой тангенсов, которой она аналогично по определенным ею приемам, эта последняя теорема, в свою очередь, более предпочтительна из-за того многообразия операций, к которым она приводит.

Этим заканчивается то, что мы хотели сказать о прямоугольных сферических треугольниках. Теперь мы переходим к другим треугольникам, причем здесь мы не будем входить в подробности; так как эти треугольники встречаются нечасто.

О других треугольниках

Мы уже говорили, что как в остроугольном, так и в тупоугольном треугольнике необходимо знать три величины для того, чтобы определать остальные величины.

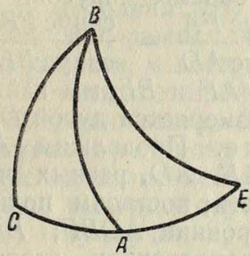
Эти три известные величины могут быть: 1) двумя сторонами и одним углом, 2) двумя углами и одной стороной, 3) тремя сторонами и 4) тремя углами.

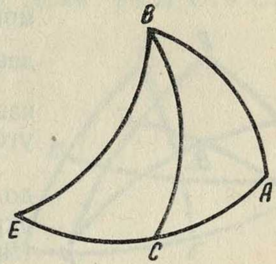
1-й и 2-й случай подразделяются на два других, в зависимости от того, будет ли известный угол находиться между известными сторонами или одна из сторон будет его хордой и будет ли известная сторона расположена между двумя известными углами или будет хордой одного из них.

Поэтому следует рассмотреть шесть случаев:

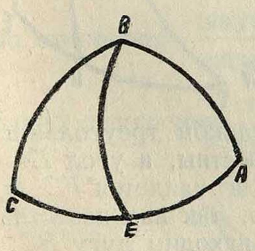
1-й случай. Известны две стороны и угол, заключенный между ними.

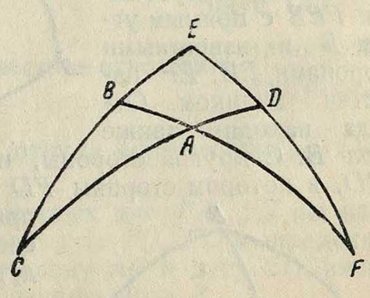
Например, в треугольнике ABC известны стороны AB, AC и угол A. Проведем через один из неизвестных углов





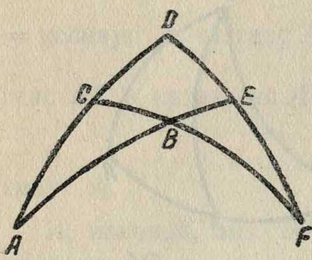
и полюс одной из примыкающих к нему сторон дугу большого круга. Пусть BE будет этой дугой; углы E будут прямыми. В остроугольных треугольниках точка E будет находиться внутри треугольника; то же произойдет в случае треугольников с тупым углом B. Если же тупым углом является A или C, точка E будет находиться вне треугольника со стороны тупого угла. Пусть теперь в треугольнике ABE известны сторона AB и угол A.





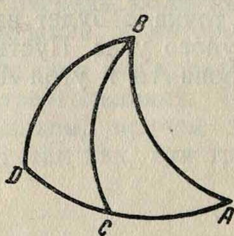
Остальные величины этого треугольника найдутся по 4-му случаю прямоугольных треугольников: таким же образом в треугольнике BCE мы найдем стороны BE, CE, откуда мы найдем другую сторону и остальные углы по 2-му случаю прямоугольных треугольников. Таким образом мы можем определить углы B, C и сторону BC в силу теоремы синусов и теоремы тангенсов.

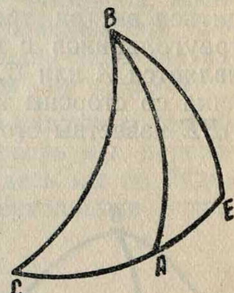
Иначе. Продолжим CA и CB до дуг CE и CD, равных четверти окружности, продолжим сторону ED до ее пересечения с AB в точке F; тем самым мы получим полный четырехсторонник $ACEF$. В треугольнике AFD известны угол A и сторона AD, являющаяся дополнением AC; угол D—прямой; все остальные величины мы найдем по 5-му случаю прямоугольных треугольников. В треугольнике FEB известны стороны FB, равная сумме FA и AB и угол F, а угол E—прямой. Все остальные величины мы найдем по 4-му случаю прямоугольных треугольников; с помощью теоремы синусов, которая дает $\frac{\text{синус}\, FA}{\text{синус}\, AD} = \frac{\text{синус}\, FB}{\text{синус}\, BE}$; если известны AF и BF, мы найдем AB; угол C измеряется дугой DE.

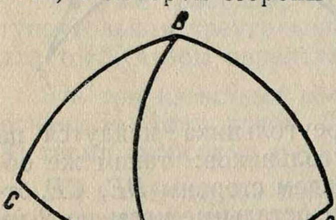


Иначе. Продолжим AC, AB до дуг AE, AD, равных четверти окружности; построим полный четырехсторонник $ADBF$; BE, CD, равные дополнениям сторон AB, AC,—известны.

По теореме тангенсов $\frac{\text{тангенс}\, BE}{\text{тангенс}\, CD} = \frac{\text{синус}\ FE}{\text{синус}\ FD}$, так как кроме того, известна дуга ED, измеряющая угол A, то дуги FD и FE известны в силу установленного в книге III. Поэтому треугольник FEB с прямым углом B и известными сторонами EB, EF известен целиком. Отсюда находим также угол B. С другой стороны, известен целиком треугольник FCD, в котором стороны FD и DC известны, а угол D—прямой, откуда найдется FC, а, следовательно, так как известна дуга FB, мы находим дугу BC.



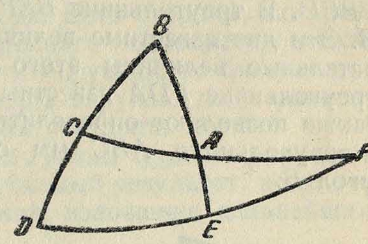




2-й случай. Известны две стороны и угол, не заключенный между этими сторонами. Например, в треугольнике ABC известны стороны AB, BC и угол A.

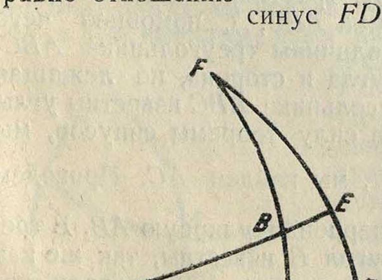
По теореме синусов отношение синусов углов равно отношению синусов и хорд; угол C известен; проведем, как обычно, дугу BE, перпендикулярную к AC; в треугольнике ABE известны A и AB, так как угол E прямой, остальные величины найдутся по 4-му случаю прямоугольных треугольников.

Теперь, в треугольнике BCE известны BC, BE и, следовательно, остальные элементы найдутся по 1-му случаю прямоугольных треугольников. Точно так же мы определим в треугольнике ABC сторону AC и углы B и C.



Иначе. Дополним AB, BC до дуг BE, BD, равных четверти окружности, и построим полный четырехсторонник $BDFA$. В треугольнике FAE известны угол A и сторона AE, являющаяся дополнением AB, и остальные величины определяются по 4-му случаю прямоугольных треугольников. Но так как дуги AE, CD связаны с дугами AF, FC и с их широтами FE, FD, дуги FC и FD можно найти с помощью основной теоремы синусов или основной теоремы тангенсов. Отсюда найдется дуга AC, равная разности FC и AF и дополнению.

В измеряемой дугой DE точно так же определится и угол C. В самом деле, известное отношение $\frac{\text{синус } AE}{\text{синус } CD}$ равно отношению $\frac{\text{синус } FA}{\text{синус } FC}$ и известное отношение $\frac{\text{тангенс } AE}{\text{тангенс } CD}$ равно отношению $\frac{\text{синус } FE}{\text{синус } FD}$, откуда при помощи двух известных дуг FA, FE мы найдем дуги FC, FD и определим сторону AC и дугу ED, измеряющую угол B.

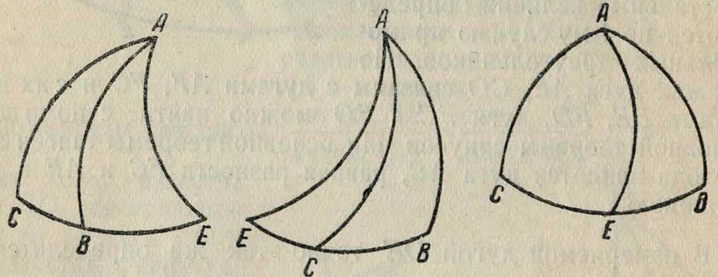


3-й случай. Известны два угла и сторона, к которой они примыкают. Например, в треугольнике ABC известны углы B, C и сторона BC.

Следует продолжить дугу большого круга за один из известных углов до встречи с хордой этого угла под прямым углом.

Пусть BE—эта дуга. В треугольнике ABC сторона BC и угол C известны, угол E—прямой, вследствие чего мы найдем все остальные величины по 5-му случаю прямоугольных треугольников. Поэтому в треугольнике ABC можно определить угол A и стороны AB, AC двумя путями, как это было показано в двух предыдущих случаях.

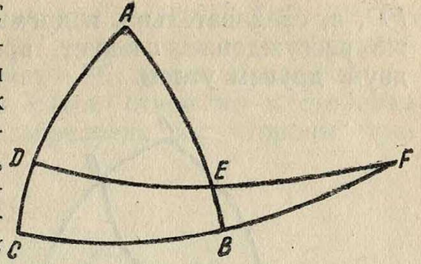
Иначе. Дополним BC, AC до дуг CE, CD, равных четверти окружности, и построим полный четырехсторонник $FBCD$. В треугольнике BEF известны сторона BE и угол B. Эти две известные величины позволяют определить все остальные величины этого треугольника; точно также в треугольнике FDA известны угол F и сторона FD, которые также позволяют определить остальные величины, так что в треугольнике ABC мы определим стороны AB, AC и угол B.

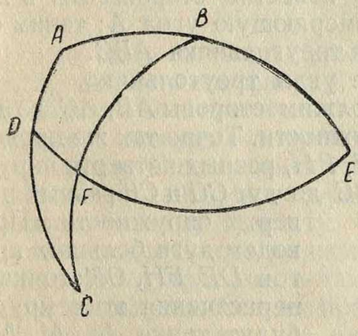


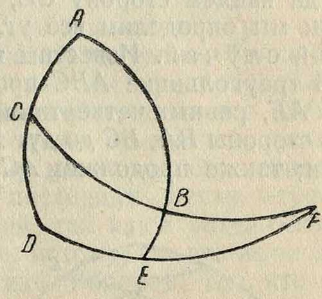
Иначе. Проведем через вершину A дугу, перпендикулярную BC, и, в силу теоремы тангенсов, мы получим, что известное отношение $\frac{\text{тангенс } D}{\text{тангенс } BC}$ равно отношению $\frac{\text{синус } CE}{\text{синус } BE}$. Так как известны это отношение и дуга BC, мы найдем каждую из дуг BE, CE, как это было показано в книге III; далее мы найдем стороны AB, BE треугольника ABE и сторону EC и угол A треугольника AEC, с помощью чего мы найдем и все остальные величины треугольника ABC.

4-й случай. Известны два угла и сторона, не лежащая между ними. Например, в треугольнике ABC известны углы A, B и сторона BC. Так как, в силу теоремы синусов, мы имеем $\frac{\text{синус } A}{\text{синус } B} = \frac{\text{синус } BC}{\text{синус } AB}$, мы найдем AC. Проведем теперь, как обычно, дугу CE, перпендикулярную AB. В треугольнике BCE сторона BC и угол B известны, так же как в треугольнике ACE сторона AC и угол A, благодаря чему мы найдем все остальные величины по случаю 5-му прямоугольных треугольников, как выше в 3-м случае.

И н а ч е. Дополним AB, BC до дуг CE, CD, равных четверти окружности, и построим полный четырехсторонник $CBFD$; сторону AC мы определим, как это изложено выше, угол C и сторону AB мы определим по 5-му случаю прямоугольных треугольников; как выше во втором случае—нецелесообразно повторять это снова. Если стороны, которые мы продолжим для построения полного четырехсторонника, или одна из них больше четверти окружности, следует отложить на большей из них четверть окружности и провести дугу круга таким образом, чтобы построить полный четырехсторонник, все стороны которого равны четверти окружности. Таким образом мы получим искомый результат; но после произведенных нами разъяснений, изложение дальнейших подробностей нецелесообразно.

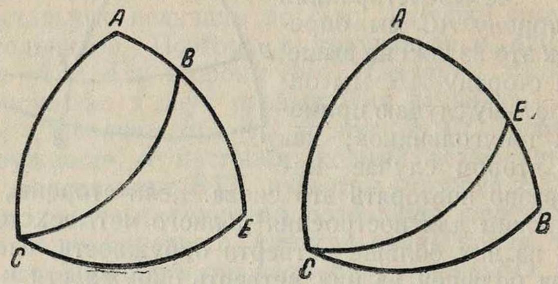






5-й с л у ч а й. Известны все стороны треугольника. Дополним AB, AC до дуг AE, AD, равных четверти окружности, и построим полный четырехсторонник. Так как дуги AB и AC известны, известны также дуги BE и CD. Но BE и CD являются склонениями дуг FB и FC; углы D и E—прямые. Поэтому нам известно отношение синусов дуг FB и FC. С другой стороны, известна разность этих дуг, равна BC. Поэтому, в силу установленного в книге III, будут известны обе дуги FB, FC, т. е. в треугольниках FBE, FCD, которые оба являются прямоугольными, будут известны две стороны, откуда будут известны дуги FE,

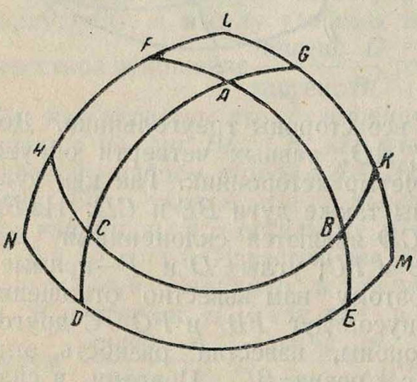
FD, а, следовательно, и дуга *DE*, измеряющая угол *A*. То же рассуждение следует провести и по отношению к двум другим углам.



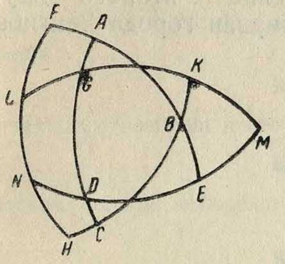
Если одна из сторон, например *AC*, равна четверти окружности, продолжим сторону *AB* до дуги *AE*, равной четверти окружности, и проведем дугу *EC*. Так как известна сторона *AB*, а *AE* равна четверти окружности, определим дугу *BE*. В треугольнике *BEC* известны стороны *BE* и *BC*, откуда найдем сторону *CE*, измеряющую угол *A*; таким образом мы определим все углы треугольника *ABC*.

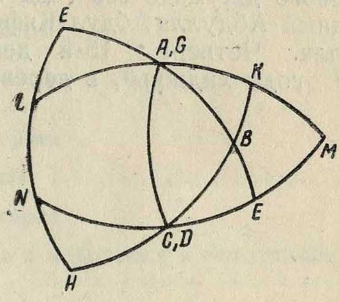
6-й случай. Известны все углы треугольника.

В треугольнике *ABC* продолжим стороны *AB*, *AC* до дуг *AD*, *AE*, равных четверти окружности. Точно так же продолжим стороны *BA*, *BC* до дуг *BF*, *BH*, равных четверти окружности; также продолжим *AC*, *BC* до дуг *CG* и *CK* равных четверти окружности. Проведем дуги больших кругов *DE*, *FH*, *GK*; точками пересечения этих кругов будут точки *L*, *M*, *N* и мы получим треугольник *LMN*, стороны которого будут дугами больших кругов, так как углы *A*, *B*, *C* известны, известны также дуги *DE*, *GK*, *FH*; так как *K* и *H*—прямые углы *L* будет полюсом *KH*; точно также *M* будет полюсом *GD*, а *N*—полюсом—*FE*; далее, *GL*, *KM*, являющиеся дополнениями дуги *KG*, также известны, тем самым известна и дуга *LM*. Точно также мы найдем дуги *LN*, *MN*. Таким образом известны все три стороны треугольника *LMN*, а в силу предыдущего случая известны и все три угла этого треуголь-



ника; отсюда следует, что известны дуги KH, DG, EF. Но так как каждая из дуг KC, BH равна четверти окружности, дополнение HK будет равно BC; таким образом сторона BC будет известна, то же самое относится к сторонам AB, BC, Таким образом, мы определим все стороны треугольника ABC.





Если одна из сторон равна или больше четверти окружности, мы получим фигуру, указанную выше. Точно таким же образом в аналогичных случаях мы определили бы неизвестные с помощью теоремы тангенсов, если это окажется возможным. Однако мне этот прием неизвестен, если мне удастся его найти, я не премину поместить его в виде приложения к этому трактату. В последних шести случаях я опустил подробности вычислений, так как я хотел быть возможно более кратким, а также потому, что эти вычисления не часто встречаются на практике. Впрочем, тем, кто хорошо усвоил все сказанное мной до сих пор, не представит трудностей произвести необходимые вычисления самим.

Показав путь, которому нужно следовать для определения сторон и углов в прямоугольных, остроугольных и тупоугольных треугольниках, образованных пересечениями дуг больших кругов на сфере, мы тем показали путь для определения углов и сторон семи треугольников, связанных с данным сферическим треугольником, и таким образом мы установили метод определения неизвестных величин через известные во всевозможных сферических треугольниках. Мы видели также, как все эти правила связаны с теорией полного четырехсторонника, так как для доказательства этих правил достаточно, чтобы некоторые стороны произвольного треугольника были продолжены до дуг, равных четверти окружности, причем в этом полном четырехстороннике в одних случаях мы рассматриваем составные отношения, а в других случаях простые отношения. Вот почему мы считали необходимым добавить эту книгу к четырем предыдущим.

На этом мы закончим то, что мы хотели сказать.

Автор закончил сочинение этой книги 21-го дня месяца первого джумада 653 года хиджры[1]. Переписал эту книгу бедный Абдулла Абдул Кяфи ибн Абдул Меджид ибн Обеидулла. Четверг, 15-й день месяца второго джумада 677 года хиджры[2], в деревне Ширван города Зенгибабад.

---

[1] 4 мая 1260 г.
[2] 3 ноября 1278 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тех. редактор *К. Исрафилов*

Подписано к печати 16/IX 1952 г. Бумага $60 \times 92^1/_6 = 6,^1/_4$ печат. лист. 12,5. Учет. изд. 125. ФГ 18926. Заказ № 173. Тираж 1000.
Цена по прейскуранту 1952 г. 9. руб. 75 коп.

Управление по делам полиграфической промышленности, издательств и книжной торговли при Совете Министров Азербайджанской ССР. Типография „Красный Восток".
Баку, ул. Ази Асланова, 80.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
14	сн. 3	r—Cosα)	r (1—Cos α)
168	чертеж	поменять местами буквы K и F	

Зак. 173

98 коп.
~~9 руб. 75~~ коп.

7906

2020036917

АЗӘРБАЙЧАН ССР ЭЛМЛӘР АКАДЕМИЯСЫ
ФИЗИКА ВӘ РИЯЗИЙЯТ ИНСТИТУТУ

Мәһәммәд Нәсирәддин Туси

Там дөрдтәрәфли һаггында ӘСӘР
(ШӘКЛҮЛ ГИТА)

Азәрбайчан ССР Элмләр Академиясы Нәшрийяты
Бакы — 1952